חשבון אינפיניטסימלי 1 – 88-132 – תש"פ

תרגיל 1 – חזרה על חומר של תיכון

לא להגשה

1. הוכיחו באינדוקציה כי כל אחד מהשוויונות הבאים נכון לכל מספר טבעי n, וכן רישמו מחדש את השוויונות ע"י סימון הסכימה Σ:

א. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\sum_{m=1}^{n} m^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

עבור $n=1$ אכן מתקיים $1^2=\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$

נניח כי השוויון מתקיים עבור $n=k$, ונראה כי הוא מתקיים עבור $n=k+1$. צ"ל ש-

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

נציב את הנחת האינדוקציה $1^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ *בשוויון זה, ונקבל שצריך להראות ש-*

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

וזהו פסוק אמת, כי בכל אחד משני הצדדים מופיע הביטוי:

$$\frac{1}{6}(2k^3+9k^2+13k+6)$$

ב. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

עבור $n=1$ אכן מתקיים $1^3=\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4}$

נניח כי השוויון מתקיים עבור $n=k$, ונראה כי הוא מתקיים עבור $n=k+1$. צ"ל ש-

$$1^2+2^2+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

נציב את הנחת האינדוקציה $1^2+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ *בשוויון זה, ונקבל שצריך להראות ש-*

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

וזהו פסוק אמת, כי בכל אחד משני הצדדים מופיע הביטוי:

$$\frac{1}{4}(k^4+6k^3+13k^2+12k+4)$$

2. מיצאו את המספר הטבעי הראשון עבורו מתקיים אי-השוויון הבא והוכיחו באינדוקציה שהחל ממנו הוא אכן מתקיים:

$$3^n>2^n+200$$

ע"י הצבה רואים שאי-השוויון איננו מתקיים עבור $n=4$ ומטה אך כן מתקיים עבור $n=5$. זהו מקרה הבסיס של האינדוקציה.

נניח כי אי-השוויון מתקיים עבור $n = k$ כלומר:

$$3^k > 2^k + 200$$

ונראה שהוא מתקיים עבור $n = k + 1$ כלומר צ"ל ש-

$$3^{k+1} > 2^{k+1} + 200$$

אכן, על סמך הנחת האינדוקציה,

$$3^{k+1} = 3 \cdot 3^k > 3 \cdot (2^k + 200) = 3 \cdot 2^k + 600 > 2 \cdot 2^k + 200 = 2^{k+1} + 200$$

כדרוש.

3. מיצאו את השגיאה ב"הוכחה" הבאה.

<u>טענה:</u> לכל הסוסים בעולם יש את אותו הצבע.

<u>הוכחה:</u> נוכיח באינדוקציה על מספר הסוסים n .

מקרה הבסיס $(n = 1)$: ברור שבקבוצה של סוס אחד, לכל הסוסים באותה הקבוצה יש את אותו הצבע.

שלב האינדוקציה: נניח שכבר הוכחנו שהטענה נכונה עבור כל $n = k$ סוסים ונוכיח על סמך כך כי היא נכונה עבור כל קבוצה של $n = k + 1$ סוסים.

נסתכל על קבוצת $k + 1$ הסוסים . מתוכם, k הראשונים הם בהכרח באותו צבע, לפי הנחת האינדוקציה.

באותו האופן, גם k האחרונים ביניהם הם בהכרח באותו צבע, שוב לפי הנחת האינדוקציה.

לכן, ברור כי גם לכל $k + 1$ הסוסים יש את אותו הצבע.

הראנו כי הטענה נכונה עבור $n = 1$ והראנו שאם היא נכונה עבור $n = k$ היא נכונה גם עבור $n = k + 1$, לכן לפי אקסיומת האינדוקציה הראינו כי הטענה נכונה לכל המספרים הטבעיים, מש"ל.

השגיאה היא בשלב "לכן, ברור כי גם לכל $k + 1$ הסוסים יש את אותו הצבע." ההסקה הזו אומנם נכונה עבור $k \geq 2$ אבל לא עבור $k = 1$.

4. פיתחו את הסוגריים לפי נוסחת הבינום של ניוטון:

א. $(a - b)^5$

ב. $(x - y^2)^6$

ג. $(x^2 + 3)^6$

ד. $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)^5$

ה. $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^6$

פתרון:

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$(x-y^2)^6 = x^6 - 6x^5y^2 + 15x^4y^4 - 20x^3y^6 + 15x^2y^8 - 6xy^{10} + y^{12}$$

$$(x^2+3)^3 = x^{12} + 18x^{10} + 135x^8 + 540x^6 + 1215x^4 + 1458x^2 + 729$$

$$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)^5 = \frac{401}{32} + \frac{149}{16}\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^6 = x^3 - 6x^{3/2} + 15 - 20x^{-3/2} + 15x^{-3} - 6x^{-9/2} + x^{-6}$$

5. מהו המקדם של a^7 בביטוי $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$?

לאחר פתיחת סוגריים לפי נוסחת הבינום של ניוטון איבר כללי הוא מהצורה

$$C_k\left(a^{2/3}\right)^k\left(a^{1/2}\right)^{(12-k)}$$

באשר C_k הוא קבוע התלוי ב-k. מחפשים את a^7 כלומר נפתור את

$$a^{2k/3}a^{(12-k)/2}=a^7$$

כלומר את

$$\frac{2k}{3}+\frac{12-k}{2}=7$$

הפתרון הוא $k=6$ וכאשר נציב בנוסחת הבינום נקבל את המקדם המבוקש:

$$\binom{12}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^{12\text{-}6}=\frac{924}{64}=\frac{231}{16}$$

6. פשטו את הביטויים הבאים ככל הניתן:

$$\frac{32x^2-2}{(1-4x)(2x-7)}$$

$$\frac{x^2y^2-1}{xy+1}$$

$$\frac{5a^2-16a+12}{5a^3-a^2-6a}$$

$$\frac{n^4-m^4}{n^2-3nm+2m^2}\cdot\frac{n^2-nm-2m^2}{n^2+m^2}$$

$$\left(\frac{-5x^2-4x-2}{9x^2-1}+\frac{x-1}{3x+1}+\frac{2x+1}{3x-1}\right)\left(\frac{36x^2+24x+4}{4x^2+13x-12}\right)$$

פתרון:

$$\frac{32x^2-2}{(1-4x)(2x-7)}=\frac{2(4x-1)(4x+1)}{(1-4x)(2x-7)}=\frac{-2(4x+1)}{2x-7}$$

$$\frac{x^2y^2-1}{xy+1}=\frac{(xy-1)(xy+1)}{xy+1}=xy-1$$

$$\frac{5a^2-16a+12}{5a^3-a^2-6a}=\frac{(a-2)(5a-6)}{a(5a^2-a-6)}=\frac{(a-2)(5a-6)}{a(a+1)(5a-6)}=\frac{a-2}{a(a+1)}$$

$$\frac{n^4-m^4}{n^2-3nm+2m^2}\cdot\frac{n^2-nm-2m^2}{n^2+m^2}=\frac{(n^2-m^2)(n^2+m^2)}{(n-2m)(n-m)}\cdot\frac{(n-2m)(n+m)}{n^2+m^2}=$$

$$=\frac{(n-m)(n+m)(n^2+m^2)}{(n-2m)(n-m)}\cdot\frac{(n-2m)(n+m)}{n^2+m^2}=(n+m)^2$$

2. נטפל קודם כל בסוגריים השמאליים: המכנה השמאלי מתפרק לפי כפל מקוצר ל- $(3x-1)(3x+1)$ לכן זהו המכנה המשותף ונקבל: $\frac{-5x^2-4x-2+(3x-1)(x-1)+(2x+1)(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)}$ כלומר $\frac{x(4x-3)}{(3x-1)(3x+1)}$. כעת נטפל בשבר הימני. המונה הוא $4(9x^2+6x+1)$ וע"י כפל מקוצר נקבל $4(3x+1)^2$. במכנה: רוצים 2 מספרים שמכפלתם -48 וסכומם -13 כלומר הם $-16,3$ לכן הפתרונות הם $x_{1,2}=\frac{-16}{4},\frac{3}{4}=-4,\frac{3}{4}$. כלומר פירוק המכנה הוא $4(x+4)(x-\frac{3}{4})=(x+4)(4x-3)$. כעת נוכל לכפול את שני השברים:

$$\frac{x(4x-3)}{(3x-1)(3x+1)}\cdot\frac{4(3x+1)^2}{(x+4)(4x-3)}=\frac{4x(3x+1)}{(3x-1)(x+4)}$$

7. מיצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר(*) של כל אחת מקבוצות המספרים הבאות:

א. $\{30,36,78,114\}$

ב. $\mathbb{N}$

ג. $\{\, n(n+1)\ \mid n\in\mathbb{N}\,\}$

(*) המחלק המשותף הגדול ביותר של קבוצת מספרים טבעיים הוא המספר הטבעי אשר מחלק את כולם, והוא הגדול ביותר מבין כל המספרים בעלי תכונה זו.

- פתרון: א. 6 ב. 1 ג. 2 (כל איברי הקבוצה הם זוגיים כי מכפלת שני מספרים עוקבים היא זוגית $n(n+1)$.)

8. מיצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר של

$$\{\, n(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)\ \mid n\in\mathbb{N}\,\}$$

פתרון:

- כל איברי הקבוצה הם זוגיים כי מכפלת שני מספרים עוקבים היא זוגית.
- כל איברי הקבוצה מתחלקים ב-3 כי השארית של n בחלוקה ב-3 היא או 0 או 1 או 2. בכל אחת מהאפשרויות לפחות אחד מהמספרים $n, n+1, 2n+1$ מתחלק ב-3.
- באותו האופן, כל איברי הקבוצה מתחלקים ב-5 כי השארית בחלוקה ב-5 של מספר טבעי היא אחת מבין 0,1,2,3,4. לכל אחת מהאפשרויות אלה, לפחות אחד מבין $n, n+1, 2n+1, 3n+1, 4n+1$ מתחלק ב-5.

לסיום, כל איברי הקבוצה מתחלקים ב-2, ב-3, וב-5, כלומר הם מתחלקים ב-30. לכן 30 הוא מחלק משותף של איברי הקבוצה.

מדוע הוא אכן המקסימלי? למשל כי כשמציבים $n = 1$ מקבלים 120. מצד שני כשמציבים $n = 2$ מקבלים $30 \cdot 7 \cdot 9$ ומצירוף שתי עובדות אלה המחלק המשותף הגדול ביותר הוא 30. (הסבר: אין מספר הגדול מ-30 המחלק את שני מספרים אלו לכן קל וחומר אין מספר הגדול מ-30 המחלק את כל המספרים בקבוצה)