

חוברת הדרכה לפתרון משוואות טריגונומטריות

חלק א': משוואות בסיסיות:

$$1. \text{ משוואה מהצורה } \sin x = \sin \alpha \leftarrow \text{ הפתרון הכללי: } \begin{cases} X_1 = \alpha + 360^\circ k \\ X_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k \end{cases} \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

כאשר $k=0$ נקבל את הפתרונות במחזור החיובי הראשון.
 כאשר $k=1$ נקבל את הפתרונות במחזור החיובי השני וכך הלאה.
 כאשר $k=-1$ נקבל את הפתרונות במחזור השלילי הראשון וכך הלאה.

דוגמאות:

$$a. \quad \boxed{\sin 5x = 0.8 (= \sin 53.13^\circ)}$$

$$\begin{array}{ll} 5x_1 = 53.13^\circ + 360^\circ k / : 5 & 5x_2 = 126.87^\circ + 360^\circ k \\ \underline{x_1 = 10.62^\circ + 72^\circ k} & \underline{x_2 = 25.37^\circ + 72^\circ k} \end{array}$$

$$b. \quad \boxed{\sin(3x + 20^\circ) = \sin x}$$

$$\begin{array}{ll} 3x + 20^\circ = x + 360^\circ k & 3x + 20^\circ = 180^\circ - x + 360^\circ k \\ 2x = -20^\circ + 360^\circ k / : 2 & 4x = 160^\circ + 360^\circ k / : 4 \\ \underline{x_1 = -10^\circ + 180^\circ k} \Rightarrow \underline{x_1 = 170^\circ + 180^\circ k} & \underline{x_2 = 40^\circ + 90^\circ k} \end{array}$$

הערה: אם הפיתרון הכללי יוצא שלילי (לדוגמא X_1 בדוגמא ב'), אפשר לרשום את הפיתרון הכללי כשמתחילים מהפתרון החיובי הראשון וזאת ע"י כך שמוסיפים לפיתרון השלילי את המחזור של הפתרון. בדוגמא: ל -10° מוסיפים 180° , שזהו המחזור של הפיתרון ומקבלים 170° .

$$2. \text{ משוואה מהצורה } \cos x = \cos \alpha \leftarrow \text{ הפתרון הכללי: } \begin{cases} X_1 = \alpha + 360^\circ k \\ X_2 = -\alpha + 360^\circ k \end{cases}$$

דוגמאות:

$$a. \quad \boxed{\cos 3x = \cos 130^\circ} \quad b. \quad \boxed{\cos(2x - 60^\circ) = \cos(3x + 10^\circ)}$$

$$\begin{array}{ll} 2x - 60^\circ = 3x + 10^\circ + 360^\circ k & 2x - 60^\circ = -3x - 10^\circ + 360^\circ k \\ -x = 70^\circ + 360^\circ k / \cdot (-1) & 5x = 50^\circ + 360^\circ k / : 5 \\ \underline{x_1 = -70^\circ + 360^\circ k} & \underline{x_2 = 10^\circ + 72^\circ k} \\ \Rightarrow \underline{x_1 = 290^\circ + 360^\circ k} & \end{array}$$

הערה: כאשר יש צורך לכפול או לחלק את אגפי המשוואה במספר שלילי הסימן של המחזור של המשוואה יישאר תמיד חיובי.

3. משוואה מהצורה $\left\{ \begin{array}{l} \tan x = \tan \alpha \\ \cot x = \cot \alpha \end{array} \right.$ ← הפתרון הכללי: $x = \alpha + 180^\circ k$.

דוגמא:

$$\boxed{3 \tan(2x + 10^\circ) = 6\sqrt{3}} / :3$$

$$\tan(2x + 10^\circ) = 2\sqrt{3}$$

$$\tan(2x + 10^\circ) = \tan 73.9^\circ \quad .x$$

$$2x + 10^\circ = 73.9^\circ + 180^\circ k$$

$$2x = 63.9^\circ + 180^\circ k / :2$$

$$x = 31.95^\circ + 90^\circ k$$

סיכום המקרים + מקרים פרטיים:

משוואה	פתרונות
$\sin X = \sin \alpha$	$X_1 = \alpha + 360^\circ k$ $X_2 = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$
$\sin X = -\sin \alpha$	$\sin X = \sin(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.
$\sin X = 0$	$X = 180^\circ k$
$\sin X = 1$	$X = 90^\circ + 360^\circ k$
$\sin X = -1$	$X = -90^\circ + 360^\circ k$
$\cos X = \cos \alpha$	$X_1 = \alpha + 360^\circ k$ $X_2 = -\alpha + 360^\circ k$
$\cos X = -\cos \alpha$	$\cos X = \cos(180 - \alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית המשלימה ל-180.
$\cos X = 0$	$X = 90^\circ + 180^\circ k$
$\cos X = 1$	$X = 360^\circ k$
$\cos X = -1$	$X = 180^\circ + 360^\circ k$
$\tan X = \tan \alpha$	$X = \alpha + 180^\circ k$
$\tan X = -\tan \alpha$	$\tan X = \tan(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.
$\cot X = \cot \alpha$	$X = \alpha + 180^\circ k$
$\cot X = -\cot \alpha$	$\cot X = \cot(-\alpha)$ פותרים לפי המשוואה הקודמת עם זווית שלילית.

חלק ב: שיטות עבודה לפיתרון משוואות טריגונומטריות מורכבות

1. משוואות מהצורה $\sin^2 x = a$, $\cos^2 x = a$

משתמשים בנוסחאות:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \boxed{\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \boxed{\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

דוגמאות:

$$\boxed{\sin^2 x = 0.64}$$

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} = 0.64$$

$$1 - \cos 2x = 1.28$$

$$\cos 2x = -0.28$$

$$2x = \pm 106.26^\circ + 360^\circ k / : 2$$

$$x = \pm 53.13^\circ + 180^\circ k$$

הדרך הנוספת לפתרון היא הוצאת שורש ריבועי לשני אגפי המשוואה ואז לפתור שתי משוואות פשוטות : $\sin x = 0.8$ ו- $\sin x = -0.8$ בדרך זו נקבל 4 פתרונות כלליים.

2. פתירת משוואות הכוללות אותה פונקציה בשני האגפים:

דוגמאות: (1)

$$\boxed{\sin 3x + \sin 2x = 0}$$

$$\sin 3x = -\sin 2x$$

$$\sin 3x = \sin(-2x)$$

$$3x = -2x + 360^\circ k$$

$$5x = 360^\circ k$$

$$\underline{x_1 = 72^\circ k}$$

$$3x = 180^\circ + 2x + 360^\circ k$$

$$\underline{x_2 = 180^\circ + 360^\circ k}$$

חשוב לזכור כי:

$$\text{א. } -\sin \alpha = \sin(-\alpha) \quad \text{ב. } -\tan \alpha = \tan(-\alpha) \quad \text{ג. } -\cot \alpha = \cot(-\alpha) \quad \text{ד. } -\cos \alpha = \cos(180^\circ - \alpha)$$

3. פתירת משוואות על ידי מעבר לאותה הפונקציה :

נוסחאות שימושיות למעבר לאותה הפונקציה :

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \text{ד.} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \text{ה.} \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ו.} \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \quad \text{ז.} \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \quad \text{ח.}$$

(2)

דוגמאות: (1)

$$\boxed{\cos^2 x + \sin x = 1}$$

$$1 - \sin^2 x + \sin x = 1$$

$$\sin x - \sin^2 x = 0$$

$$\sin x(1 - \sin x) = 0$$

$$\sin x = 0 \rightarrow x_1 = 180^\circ k$$

$$1 - \sin x = 0$$

$$\sin x = 1 \rightarrow x_2 = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$\boxed{\sqrt{2} \cos^2 x + \sin x = 0}$$

$$\sqrt{2}(1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$$

$$\sin x = a$$

$$\sqrt{2}(1 - a^2) + a = 0$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{2}a^2 + a = 0 \rightarrow \sqrt{2}a^2 - a - \sqrt{2} = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2\sqrt{2}} = \frac{a_1 = \sqrt{2} = \sin x}{a_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin x}$$

$$\boxed{\cos 2x = 10 \cos^2 \frac{x}{2} - 8}$$

$$2\cos^2 x - 1 = 10 \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right) - 8$$

$$\cos x = t$$

$$2t^2 - 1 = 5 + 5t - 8$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} = \frac{x_1 = 2 = \cos x}{x_2 = \frac{1}{2} = \cos x} \quad \leftarrow -1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 60^\circ + 360^\circ k$$

(3)

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(-45^\circ)$$

$$x_1 = -45^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_1 = 315^\circ + 360^\circ k$$

$$x_2 = 180^\circ + 45^\circ + 360^\circ k \rightarrow x_2 = 225^\circ + 360^\circ k$$

4. פתירת משוואות על ידי פירוק לגורמים (הבהא למכפלות)

(2)

דוגמאות: (1)

$$\boxed{\sin^2 x - \sin x + \sin x \cdot \cos x = \cos x}$$

$$\sin^2 x - \sin x + \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0$$

$$\sin x(\sin x - 1) + \cos x(\sin x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$(1.) \quad \sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x_1 = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$(2.) \quad \sin x + \cos x = 0 \rightarrow \cos x = -\sin x$$

$$\cos x = \cos(90 + x)$$

$$x = \pm(90 + x) + 360^\circ k$$

$$\cancel{x} = 90^\circ + \cancel{x} + 360^\circ k$$

$$x = -90^\circ - x + 360^\circ k$$

$$2x = -90^\circ + 360^\circ k$$

$$x = -45 + 180^\circ k \rightarrow x = 135 + 180^\circ k$$

$$\boxed{\sin^3 x + \cos^2 x + \sin x = 2}$$

$$\sin^3 x + 1 - \sin^2 x + \sin x = 2$$

$$\sin^3 x - \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin^2 x(\sin x - 1) + (\sin x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)(\sin^2 x + 1) = 0$$

$$(1.) \quad \sin^2 x + 1 \neq 0$$

$$(2.) \quad \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = 1 \rightarrow x = 90^\circ + 360^\circ k$$

5. פתרון משוואות בעזרת נוסחאות לסכום והפרש שתי פונקציות

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

דוגמאות:

(1)

$$\sin x + \sin 3x = \cos x + \cos 3x$$

$$\cancel{\sin 2x} \cdot \cos x = \cancel{\cos 2x} \cdot \cos x$$

$$\cos x [\sin 2x - \cos 2x] = 0$$

$$(1.) \cos x = 0 \rightarrow x_1 = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$(2.) \sin 2x - \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x - \sin(90 - 2x) = 0$$

(2)

$$\sin^2 3x - \sin^2 x = \sin 2x$$

$$(\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x) = \sin 2x$$

$$\underline{2} \cdot \underline{\sin x} \cdot \underline{\cos 2x} \cdot \underline{2} \cdot \underline{\sin 2x} \cdot \underline{\cos x} = \sin 2x$$

$$\underline{\sin 2x} \cdot \underline{\sin 4x} = \sin 2x$$

$$\sin 2x [\sin 4x - 1] = 0$$

$$(1.) \sin 2x = 0 \rightarrow 2x = 180^\circ k$$

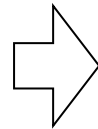
$$x_1 = 90^\circ k$$

$$(2.) \sin 4x - 1 = 0$$

$$\sin 4x = 1$$

$$4x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x_2 = 22.5^\circ + 90^\circ k$$



$$2 \sin(2x - 45^\circ) \cos 45^\circ = 0$$

$$\sin(2x - 45^\circ) = 0$$

$$2x - 45^\circ = 180^\circ k$$

$$2x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$x_2 = 22.5^\circ + 90^\circ k$$

(3)

$$\sin 3x + 2 \cdot \cos 4x \cdot \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(4x - x) + 2 \cdot \cos 4x \cdot \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 4x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos 4x + 2 \cdot \cos 4x \cdot \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 4x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\sin(4x + x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin 5x = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$$

$$5x = 30^\circ + 360^\circ k / : 5 \quad \left| \quad 5x = 150^\circ + 360^\circ k$$

$$x_1 = 6^\circ + 72^\circ k \quad \left| \quad x_2 = 30^\circ + 72^\circ k$$

6. פתירת משוואות מהצורה $a \sin(mx) + b \cos(mx) = c$ כאשר a, b - מקדמים מספריים.

דרך הפיתרון:

$$a \sin(mx) + b \cos(mx) = c \quad / : a$$

$$\sin(mx) + \frac{b}{a} \cos(mx) = \frac{c}{a}$$

$$\arctan \frac{b}{a} = \alpha \rightarrow \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

על מנת לפתור משוואה מסוג זה ישנם מספר שלבים:

1. חילוק המשוואה כולה ב- a או ב- b

(נדגים כאשר אנו מתייחסים לחלוקה a)

2. המרת $\frac{b}{a}$ לפונקציית \tan , ואותה להמיר ל- $\frac{\sin}{\cos}$.

3. לבצע מכנה משותף של ה- \cos .

4. על פי הנוסחה $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$

להפוך את כל האגף השמאלי לפונקציה אחת, ולהשוותה לאגף הימני (להפוכו למספרי).

דוגמאות:

$$\boxed{\sin x + 2 \cos x = 2}$$

$$\tan \alpha = 2 \rightarrow \alpha = 63.43^\circ$$

$$\sin x + \tan(63.43) \cdot \cos x = 2 / : \cos(63.43)$$

$$\sin x \cdot \cos(63.43) + \sin(63.43) \cdot \cos x = 2 \cos(63.43)$$

$$\sin(x + 63.43) = 0.8944$$

$$\sin(x + 63.43) = \sin 63.43$$

$$(1.) \quad x + \cancel{63.43^\circ} = \cancel{63.43^\circ} + 360^\circ k$$

$$\underline{x_1 = 360^\circ k}$$

$$(2.) \quad x + 63.43^\circ = 180^\circ - 63.43^\circ + 360^\circ k$$

$$\underline{x_2 = 53.13^\circ + 360^\circ k}$$

(1)

$$\boxed{4 \sin x + 3 \cos x = 4}$$

$$4 \sin x + 3 \cos x = 4 / : 3$$

$$\frac{4}{3} \sin x + \cos x = \frac{4}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \alpha = 53.13^\circ$$

$$\tan(53.13^\circ) \cdot \sin x + \cos x = \frac{4}{3} / \cdot \cos(53.13^\circ)$$

$$\sin(53.13^\circ) \cdot \sin x + \cos(53.13^\circ) \cdot \cos x = \frac{4}{3} \cos(53.13^\circ)$$

$$\cos(53.13^\circ - x) = 0.8 = \cos(36.87^\circ)$$

$$53.13^\circ - x = \pm 36.87^\circ + 360^\circ k$$

$$(1.) \quad 53.13^\circ - x = 36.87 + 360^\circ k$$

$$-x = -16.26^\circ + 360^\circ k$$

$$\underline{x_1 = 16.26^\circ + 360^\circ k}$$

$$(2.) \quad 53.13^\circ - x = -36.87^\circ + 360^\circ k$$

$$-x = -90^\circ + 360^\circ k$$

$$\underline{x_2 = 90^\circ + 360^\circ k}$$

(3)

$$\boxed{3 \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 3 / : 3}$$

$$\sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 2x = 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ$$

$$\sin 2x - \tan 30^\circ \cos 2x = 1$$

$$\sin 2x - \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cos 2x = 1 / \cdot \cos 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ \cdot \sin 2x - \sin 30^\circ \cdot \cos 2x = 1 \cdot \cos 30^\circ$$

$$\sin(2x - 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

פתירת משוואה מהצורה $a \sin(mx) + b \cos(mx) = c$ עם מקדמים $a = b = 1$:

(מהצורה $\sin(mx) + \cos(mx) = c$)

$$\boxed{\sin 2x + \cos 2x = 1.2}$$

$$\sin 2x + \sin(90^\circ - 2x) = 1.2$$

$$2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos(2x - 45^\circ) = 1.2 / : 2 \sin 45^\circ$$

$$\cos(2x - 45^\circ) = \frac{1.2}{2 \sin 45^\circ} = 0.8485$$

$$\cos(2x - 45^\circ) = \cos(31.95^\circ)$$

$$2x - 45^\circ = \pm 31.95^\circ + 360^\circ k$$

$$(1.) \quad 2x - 45^\circ = 31.95^\circ + 360^\circ k \quad (2.) \quad 2x - 45^\circ = -31.95^\circ + 360^\circ k$$

$$2x = 76.95^\circ + 360^\circ k$$

$$2x = 13.05^\circ + 360^\circ k$$

$$\underline{x_1 = 38.475^\circ + 180^\circ k}$$

$$\underline{x_2 = 6.525^\circ + 180^\circ k}$$

7. משוואות הומוגניות ממעלה ראשונה ושנייה

משוואות טריגונומטריות הינן הומוגניות לגבי פונקציות סינוס וקוסינוס אם הן מופיעות באותה החזקה ובאותו המחוור.

למשל: $1, 5, -3, \cos x - 1 \sin x, \cos^2 x - 1 \sin^2 x$.

באם הביטויים הללו יופיעו במשוואה, רק הם, או חלק מהם, אזי המשוואה תהיה הומוגנית מדרגה שניה.

$$\text{דוגמאות: } \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad 5 = 5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha$$

אם המשוואה היא הומוגנית, מחלקים לצורך הפיתרון את כל המשוואה ב- $\cos x$ בחזקה הגבוהה ביותר.

חובה לבדוק אם הפיתרון של $\cos x = 0$ מהווה פתרון של המשוואה המקורית וזאת ע"י הצבה $x = 90^\circ$ במשוואה המקורית.

רק אם $x = 90^\circ$ לא מהווה פתרון של המשוואה המקורית מותר לחלק ב- $\cos x$ בחזקה הגבוהה ביותר כפי שצויין מעלה. אם

$x = 90^\circ$ מקיים את המשוואה המקורית יש לפתור בדרך אחרת.

דוגמאות:

.א

$$\boxed{\sin 2x + 3\cos 2x = 0}$$

$$\sin 2x = -3\cos x / : \cos 2x$$

$$\tan 2x = -3$$

$$2x = -71.56^\circ + 180^\circ k$$

$$\underline{x = -35.78^\circ + 90^\circ k}$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = 90$$

$$x = 45$$

$$\sin 90 + 3\cos 90 \stackrel{?}{=} 0$$

$$1 + 0 \neq 0$$

מותר לחלק

בדיקה: האם מותר לחלק?:



.ב

.ג

$$\boxed{\sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 3\cos^2 x} / : \cos^2 x$$

$$x = 90^\circ \quad \text{ז"א } 0s \quad \text{נבדוק לגבי}$$

$$\sin^2 90 + 2 \cdot \sin 90 \cdot \cos 90 \stackrel{?}{=} 3\cos^2 90$$

$$1 + 0 \neq 0 \rightarrow \text{מותר לחלק}$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} = \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\tan^2 x + 2 \tan x = 3$$

$$\tan x = t \rightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} t_1 = -3 \\ t_2 = 1 \end{matrix}$$

$$(1.) \quad \tan x = -3$$

$$\underline{x_1 = -71.56^\circ + 180^\circ k}$$

$$(2.) \quad \tan x = 1$$

$$\underline{x_2 = 45^\circ + 180^\circ k}$$

$$\boxed{1 - 3\cos^2 x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x} / : \cos^2 x$$

נבדוק: האם מותר לחלק

$$\cos x = 0 \rightarrow x = 90^\circ$$

$$1 - 3\cos^2 90 \stackrel{?}{=} 2 \cdot \sin 90 \cdot \cos 90$$

$$1 + 0 \neq 0 \rightarrow \text{מותר לחלק}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - 3 = 2 \tan x$$

$$1 + \tan^2 x - 3 = 2 \tan x$$

$$\tan x = t$$

$$1 + t^2 - 3 = 2t$$

$$t^2 - 2t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{matrix} t_1 = 2.232 \\ t_2 = -0.732 \end{matrix}$$

$$(1.) \quad \tan x = -0.732$$

$$\underline{x_1 = -36.2^\circ + 180^\circ k}$$

$$(2.) \quad \tan x = 2.732$$

$$\underline{x_2 = 69.89^\circ + 180^\circ k}$$

הזהיות בטריגונומטריה

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta - 1}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta + 1}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \sin^2 \alpha - 1$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

	30°	45°	60°
Sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$