נכתב על ידי יהונתן רגב

שיטות אינטגרציה מסויימת

תזכורת

1. f רציפה בקטע $[a,b]$, אז יש לה פונקציה קדומה שם.
2. $F'=f$ ו – f רציפה בקטע $[a,b]$, אז:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$$

למה (לינאריות)

עבור פונקציות אינטגרביליות f,g בקטע $[a,b]$ וסקלרים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\alpha f+\beta g)dx = \alpha\int_a^b f dx + \beta\int_a^b g dx$$

הוכחה

ראה הרצאה 10.

למה (אינטגרציה בחלקים)

עבור פונקציות גזירות ברציפות u,v בקטע $[a,b]$:

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du$$

הוכחה

ידוע:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

כלומר:

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx$$

יהיו: F פונקציה קדומה ל - uv' ו – G פונקציה קדומה ל - vu'.

אז:

$$F = uv - G + c$$

עפ"י הנוסחה היסודית:

$$\int_a^b u\,dv = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b v\,du = G(b) - G(a)$$

$$uv_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b u\,dv = F(b) - F(a) = u(b)v(b) - G(b) + c - (u(a)v(a) - G(a) + c)$$

$$\int_a^b u\,dv = uv_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\blacksquare$$

למה (הצבה – גרסה 1)

יהיו f רציפה בקטע $[a,b]$, $g: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ גזירה ברציפות (כלומר, נגזרתה רציפה בקטע) ומקיימת: $g(\alpha) = a\,, g(\beta) = b$.

אזי:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

היתרון ביחס לאינטגרל לא מסויים הוא שכאן אין צורך לחזור למשתנה המקורי x.

הוכחה

הפונקציות $g'(t)$ ו - $f\big(g(t)\big)$ רציפות (מהנתון, לכן הפונקציה $f\big(g(t)\big)g'(t)$ רציפה ב - $[\alpha,\beta]$.

לכן, קיימת לפונקציה $f\big(g(t)\big)g'(t)$ פונקציה קדומה, G.

f רציפה בקטע $[a,b]$, לכן יש פונקציה F של f שם.

עפ״י הנוסחה היסודית:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F\big(g(\beta)\big) - F\big(g(\alpha)\big)$$

עפ״י כלל השרשרת:

$$\frac{d}{dt}F\big(g(t)\big) = F'\big(g(t)\big)\cdot g'(t) = f\big(g(t)\big)g'(t)$$

לכן:

$$F\big(g(\beta)\big) - F\big(g(\alpha)\big) = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

$$\blacksquare$$

דוגמה

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx\,, 0<a$$

נציב:

$$x \coloneqq a\cdot\sin(t)\ \ , t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

שכן:

$$a\cdot\sin(0)=0\,, a\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$$

לכן:

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\cdot\sin(t)^2}\cdot a\cdot\cos(t)\,dt$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cdot\cos(t)^2}\cdot a\cdot\cos(t)\,dt$$

$0 \le a, \cos(t)$ בתחום, לכן:

$$\sqrt{a^2 \cdot \cos(t)^2} = a \cdot \cos(t)$$

לכן:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cdot \cos(t)^2\, dt$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2t)\, dt$$

$$\int 1 + \cos(2t)\, dt = t + \frac{\sin(2t)}{2} + c$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \left(t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi \cdot a^2}{4}$$

$$\blacksquare$$

למה

תהי f פונקציה רציפה במידה שווה בתחום A.

אם $0 < \delta_n \to 0$, אז:

$$\varepsilon_n := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in A \ ,\ |x - y| < \delta_n\} \to 0$$

הוכחה

יהי $0 < \varepsilon$.

f רציפה במידה שווה, לכן קיים $0 < \delta$ כך שלכל $x, y \in A$ כך ש: $|x-y| < \delta$ מתקיים: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$\delta_n \to 0$, לכן קיים N כך שלכל $N \le n$: $\delta_n < \delta$.

יהי $N \le n$.

אם $x, y \in A$, $|x-y| < \delta_n$, אז: $|x-y| < \delta$, לכן: $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

לכן לכל $N \le n$: $0 \le \varepsilon_n \le \varepsilon$.

■

משפט (הצבה – גרסה 2)

יהיו f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $g:[\alpha,\beta] \to [a,b]$ עולה ממש, גזירה ברציפות ו - $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

אזי:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

הוכחה

יהיו P_n חלוקות מנוקדות של הקטע $[\alpha,\beta]$ כך ש: $\lambda(P_n) \to 0$.

אם $P_n : \alpha = t_0 < \cdots < t_k = \beta$ והנקודות בקטעים הם: $d_1, \cdots, d_k$, אז:

$$\sigma(P_n) = \sum_{i=1}^{k} f\big(g(d_i)\big) \cdot g'(d_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

אם נפעיל את g על החלוקה P_n, נקבל חלוקה (g עולה ממש): $Q_n : a = g(\alpha) = x_0 < \cdots < x_k = g(\beta) = b$ ונקודות בקטעים: $g(d_1), \cdots, g(d_k)$.

$d_i \in [t_{i-1}, t_i]$, כלומר: $t_{i-1} \le d_i \le t_i$, ולכן (g עולה ממש): $x_{i-1} = g(t_{i-1}) \le g(d_i) \le g(t_i) = x_i$.

קיבלנו חלוקה מנוקדת Q_n עבור:

$$\int_a^b f(x)dx$$

לכן:

$$\sigma(Q_n)=\sum_{i=1}^{k} f\big(g(d_i)\big)\cdot(x_i-x_{i-1})$$

g רציפה בקטע סגור, לכן רציפה במידה שווה שם. כיוון ש: $\lambda(P_n)\to 0$, גם $\lambda(Q_n)\to 0$, לכן:

$$\sigma(Q_n)\to\int_a^b f(x)dx$$

עפ״י משפט הערך הממוצע, לכל $i=1,\cdots,k$, קיים $c_i\in[t_{i-1},t_i]$ כך ש:

$$g'(c_i)=\frac{g(t_i)-g(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}$$

לכן:

$$\sigma(Q_n)=\sum_{i=1}^{k} f\big(g(d_i)\big)\cdot g'(c_i)\cdot(t_i-t_{i-1})$$

זה בדיוק $\sigma(P_n)$ פרט ל - c_i במקום d_i.

נחשב:

$$|\sigma(P_n)-\sigma(Q_n)|=\left|\sum_{i=1}^{k} f\big(g(d_i)\big)\cdot\big(g'(d_i)-g'(c_i)\big)\cdot\Delta_i\right|$$

f אינטגרבילית, לכן חסומה, לכן: $|f|<\gamma$, לכן עפ״י אי שוויון המשולש:

$$|\sigma(P_n)-\sigma(Q_n)|\le\left|\sum_{i=1}^{k}\gamma\cdot\big(g'(d_i)-g'(c_i)\big)\cdot\Delta_i\right|$$

g' רציפה בקטע $[\alpha,\beta]$, לכן רציפה במידה שווה שם.

נסמן: $\delta_n\coloneqq\lambda(P_n)\to 0$ ו - $\varepsilon_n\coloneqq\sup\{|g'(x)-g'(y)| : x,y\in[\alpha,\beta]\,,|x-y|<\delta_n\}$,
לכן עפ״י הלמה הקודמת:

$$|\sigma(P_n)-\sigma(Q_n)| \le \left|\sum_{i=1}^{k}\gamma\cdot\varepsilon\cdot\Delta_i\right|$$

$$|\sigma(P_n)-\sigma(Q_n)| \le \gamma\cdot\varepsilon_n\cdot(\beta-\alpha)\to 0$$

לכן, גם:

$$\sigma(P_n)\to\int_a^b f(x)dx$$

לכן:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)dt$$

$\blacksquare$