גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית - שבוע 5

26 באוגוסט 2015

<u>תזכורת:</u>

ראינו בשבוע שעבר שאפשר לאפיין קווים גיאודזיים בעזרת הנגזרת הקוואריאנטית; אם:

$$\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$$

אז γ הוא קו גיאודזי, ולהיפך.

המשוואות הגיאודזיות שלנו הן:

$$\begin{cases} \left(\gamma^1\right)'' + \Gamma^1_{ij}(\gamma^i)'\left(\gamma^j\right)' = 0 \\ \left(\gamma^2\right)'' + \Gamma^2_{ij}(\gamma^i)'\left(\gamma^j\right)' = 0 \end{cases}$$

כאשר המקדמים הם מקדמי כריסטופל:

$$\Gamma^k_{ij} = g^{mk}\left(g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}\right)$$

כאשר נרצה לחשב את הקו הגיאודזי במפורש (אשכרה לפתור את המד"ר), אנו יכולים להשתמש בכך שהפרמטריזציה של העקומה הגיאודזית היא טבעית, ובתכונה שראינו בתחילת הקורס:

$$\|\beta'\| = \sqrt{\left(\gamma'\right)^t \cdot G \cdot \left(\gamma'\right)}$$

כאשר המשטח M נתון על ידי הפרמטריזציה $r : U \to M$, γ עקומה מישורית ב־U ו־$\beta = r \circ \gamma$.

אם β גיאודזית והפרמטריזציה טבעית, נקבל:

$$1 = \|\beta'\| = \sqrt{(\gamma')^t \cdot G \cdot (\gamma')}$$

ואם נעלה בריבוע, נקבל מד"ר נוספת על γ:

$$1 = (\gamma')^t \cdot G \cdot (\gamma')$$

אם כך, אנו יכולים לחפש קווים גיאודזיים בשתי דרכים - הנגזרת הקוואריאנטית והמשוואות הגיאודזיות. בהמשך נראה דרך נוספת.

<u>משפט:</u>

1. עקומה עם עקמומיות שונה מאפס היא גיאודזית אם ורק אם הנורמל לעקומה מקביל לנורמל למשטח בכל נקודה; עקומה עם עקמומיות אפס היא תמיד גיאודזית.

2. אם $\gamma(t)$ קו גיאודזי אז גם $\gamma(at+b)$ קו גיאודזי (איזומטריה שומרת על גיאודזים).

<u>תרגיל:</u>

מצאו את הקווים הגיאודזיים על המשטחים הבאים. אם זה לא נורא מאד, מצאו את העקומות הגיאודזיות.

א. ספירה: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של הספירה היא:

$$X(\theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$$

באופן טריוויאלי לאחר חישוב קליל נקבל:

$$G = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

ומקדמי כריסטופל שלא מתאפסים הם:

$$\Gamma_{22}^{1}=-\sin\theta\cos\theta,\Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\cot\theta$$

נסמן: $\gamma_1(t)=\theta(t),\gamma_2(t)=\phi(t)$ והמשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases}\theta''-\sin\theta\cos\theta\left(\phi'\right)^2=0\\ \phi''+2\cot\theta\theta'\phi'=0\end{cases}$$

המשוואה שנובעת מטבעיותה של הפרמטריזציה היא:

$$1=\begin{pmatrix}\theta' & \phi'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r^2 & 0\\ 0 & r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta'\\ \phi'\end{pmatrix}$$

ולכן נוכל לכתוב:

$$\begin{cases}\theta''-\sin\theta\cos\theta\left(\phi'\right)^2=0\\ \phi''+2\cot\theta\theta'\phi'=0\\ r^2\left(\theta'\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\phi'\right)^2=1\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל:

$$\frac{\phi''}{\phi'}=-2\cot\theta\theta'$$

נבצע אינטגרציה dt על שני האגפים ונקבל:

$$\ln\phi'=\int\frac{\phi''}{\phi'}dt=\int-2\cot\theta\theta' dt=-2\int\cot\theta d\theta=-2\ln\left(\sin\theta\right)+\ln C$$

כאשר משנים משתנה מ$-t$ ל$-\theta$, מקבלים $d\theta=\theta'(t)dt$. מכיוון שהאינטגרל אינו מסוים, הוספנו קבוע $\ln C$ (הוספנו בצורת $\ln$ לשם הנוחות).

אם כן, בעזרת חוקי לוגריתמים:

$$\phi' = \frac{C}{\sin^2\theta}$$

כעת, נציב את ϕ' במשוואה השלישית ונקבל:

$$r^2\left(\theta'\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{C}{\sin^2\theta}\right)^2 = 1$$

נבודד את θ' ונקבל:

$$\theta' = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - r^2C^2}}{r\sin\theta}$$

נתבונן ב:

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\phi}{dt}} = \frac{\theta'}{\phi'} = \frac{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - r^2C^2}}{Cr}$$

ואם כן, $d\phi = \frac{Cr}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - r^2C^2}}d\theta$. לכן, מצד אחד:

$$\int d\phi = \phi$$

ומצד שני:

$$\int d\phi = \int \frac{Cr}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - r^2C^2}}d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2C^2}{\sin^2\theta}}} \cdot \frac{Cr}{\sin^2\theta}d\theta =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1 - r^2C^2 + r^2C^2\cot^2\theta}} \cdot \frac{Cr}{\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2C^2\cot^2\theta}{1-r^2C^2}}} \cdot \frac{Cr}{\sqrt{1 - r^2C^2}\cdot\sin^2\theta}d\theta$$

כעת, $(\cot\theta)' = -\frac{1}{\sin^2\theta}$. אם כן, נבצע החלפת משתנים:

$$p = \frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1 - r^2C^2}} \Longrightarrow dp = -\frac{Cr}{\sqrt{1 - r^2C^2}\cdot\sin^2\theta}d\theta$$

ונקבל:

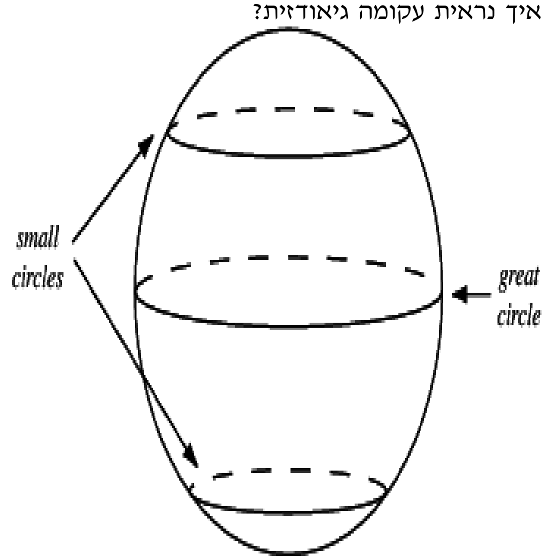
$$\phi = \int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2C^2\cot^2\theta}{1-r^2C^2}}} \cdot \frac{Cr}{\sqrt{1-r^2C^2}\cdot\sin^2\theta} d\theta = -\int \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} dp$$

ולכן: $\phi = -\arcsin p - B = -\arcsin\left(\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right) - B$. הוספנו קבוע B כי האינטגרל אינו מסוים.

לפיכך, קו גיאודזי נראה כך:

$$\gamma = \left(\theta, -\arcsin\left(\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right) - B\right)$$

איך נראית עקומה גיאודזית?



אנו יודעים שעקומה גיאודזית על הספירה היא קשת של מעגל גדול; כעת נראה זאת.

אנו יודעים ש: $\phi = -\arcsin\left(\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}\right) - B$, ולכן:

$$\frac{Cr\cot\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}} = -\sin(\phi + B)$$

נשתמש בזהות ל-$\sin$ של סכום זוויות ונקבל:

$$\frac{Cr\cos\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}\cdot\sin\theta}=-\sin\phi\cos B-\cos\phi\sin B$$

נכפול ב-$\sin\theta$:

$$\frac{Cr\cos\theta}{\sqrt{1-r^2C^2}}=-\sin\phi\sin\theta\cos B-\cos\phi\sin\theta\sin B$$

נעבור מהקואורדינטות הספריות חזרה לקואורדינטות (x,y,z):

$$(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\theta)$$

לכן: $r\cos\theta=z,-\sin\phi\sin\theta=-\frac{y}{r},-\sin\theta\cos\phi=-\frac{x}{r}$.

נסמן: $A_2=\frac{\cos B}{r},A_1=\frac{\sin B}{r},A_3=\frac{C}{\sqrt{1-r^2C^2}}$ ונוכל לרשום:

$$A_3z=-A_1x-A_2y$$

וזוהי משוואת מישור שעובר בראשית הצירים.

העקומה הגיאודזית נמצאת גם על המישור (כי היא מקיימת את משוואתו) וגם על הספירה, ולכן היא חלק מחיתוך המישור והספירה.

אנו יודעים שחיתוך של מישור שעובר בראשית ושל ספירה הוא מעגל גדול, ולכן העקומה הגיאודזית היא קשת מעגל גדול.

ב. גליל: $x^2+y^2=r^2$.

<u>פתרון:</u>

מצאנו את הקווים הגיאודזיים של הגליל בעבר. נחזור על זאת בקצרה ונמצא את העקומות הגיאודזיות.

פרמטריזציה של הגליל היא למשל:

$$X(\theta,v)=(r\cos\theta,r\sin\theta,v)$$

המטריקה היא:

$$G=\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכל מקדמי כריסטופל מתאפסים. לכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} \theta''=0 \\ v''=0 \end{cases}$$

נאטגרץ פעמיים ונקבל:

$$\begin{cases} \theta=at+b \\ v=ct+d \end{cases}$$

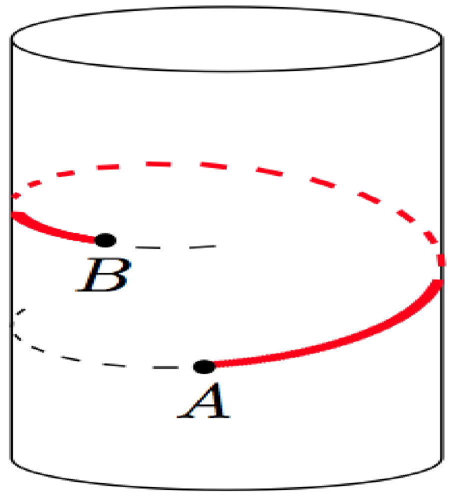
כלומר הקווים הגיאודזיים הם קווים ישרים:

$$\gamma(t)=(a,c)\,t+(b,d)$$

נציב בפרמטריזציה כדי לקבל את העקומות הגיאודזיות:

$$X\circ\gamma=\left(r\cos\left(at+b\right),r\sin\left(at+b\right),ct+d\right)$$

וזהו סליל לאורך הגליל.



ג. חרוט עם הפרמטריזציה:

$$X\left(\theta,v\right)=\left(rv\cos\theta,rv\sin\theta,v\right)$$

<u>פתרון:</u>

לאחר חישוב נקבל:

$$G=\begin{pmatrix} r^2v^2 & 0 \\ 0 & 1+r^2 \end{pmatrix}$$

ומקדמי כריסטופל שאינם מתאפסים הם:

$$\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=\frac{1}{v},\Gamma_{11}^2=-\frac{r^2}{1+r^2}v$$

לכן המשוואות הגיאודזיות יהיו:

$$\begin{cases} \theta''+\frac{2}{v}\theta'v'=0 \\ v''-\frac{r^2}{1+r^2}v\left(\theta'\right)^2=0 \end{cases}$$

כמו כן, נדרוש שהפרמטריזציה של העקומה הגיאודזית תהיה טבעית ונקבל:

$$1 = (\gamma')^t \cdot G \cdot (\gamma') = r^2 v^2 (\theta')^2 + \left(1 + r^2\right) (v')^2$$

מהמשוואה הגיאודזית הראשונה נקבל:

$$\frac{\theta''}{\theta'} = -2\frac{v'}{v}$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים לפי t ונקבל:

$$\ln \theta' = \int \frac{\theta''}{\theta'} dt = \int -2\frac{v'}{v} dt = -2 \ln v + \ln C$$

הוספנו קבוע $\ln C$ כי האינטגרל לא מסוים. מחוקי הלוגריתמים נקבל:

$$\theta' = \frac{C}{v^2}$$

נציב במשוואה השלישית ונקבל:

$$1 = r^2 v^2 \left(\frac{C}{v^2}\right)^2 + \left(1 + r^2\right) (v')^2$$

נבודד את v' ונקבל:

$$\frac{dv}{dt} = v' = \frac{\sqrt{v^2 - r^2 C^2}}{v\sqrt{1 + r^2}} \Longrightarrow dt = \frac{v\sqrt{1 + r^2}}{\sqrt{v^2 - r^2 C^2}} dv$$

לכן:

$$t = \int dt = \int \frac{v\sqrt{1 + r^2}}{\sqrt{v^2 - r^2 C^2}} dv = \sqrt{(1 + r^2)(v^2 - r^2 C^2)} + B$$

הוספנו B כי האינטגרל לא מסוים. נחלץ את v ונקבל:

$$v=\sqrt{\frac{(t-B)^2}{1+r^2}+r^2C^2}$$

נציב את v שמצאנו חזרה במשוואה של θ':

$$\theta'=\frac{C}{\left(\frac{(t-B)^2}{1+r^2}+r^2C^2\right)}=\frac{1}{r^2C}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)}$$

נאטגרץ ונקבל:

$$\theta=\int\frac{1}{r^2C}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)}dt=$$

נחליף קלות את המשתנים:

$$p=\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\Longrightarrow dp=\frac{1}{Cr\sqrt{1+r^2}}$$

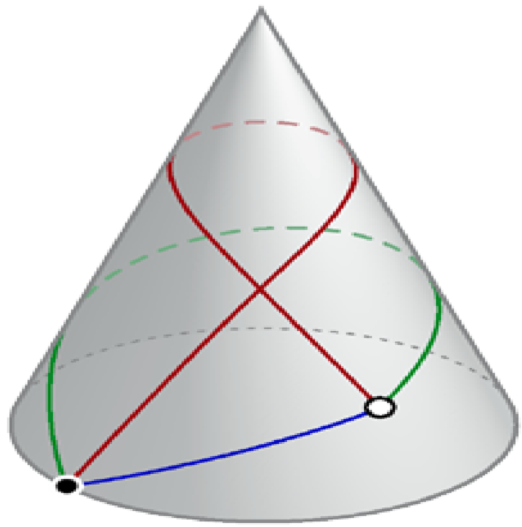
ונקבל:

$$\theta=\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\cdot\int\frac{1}{1+p^2}dp=\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan p+A=\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)+A$$

ובסך הכל, הנוסחה לקו גיאודזי על חרוט היא:

$$\gamma(t)=\left(\sqrt{1+\frac{1}{r^2}}\arctan\left(\frac{t-B}{Cr\sqrt{1+r^2}}\right)+A,\sqrt{\frac{(t-B)^2}{1+r^2}+r^2C^2}\right)$$

העקומות הגיאודזיות על החרוט נראות כך:



ד. משטח שהמטריקה שלו היא:

$$G=\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u>

נניח שהפרמטריזציה של המשטח היא $X(u,v)$.

לאחר חישוב אפשר להיווכח שמקדמי כריסטופל שאינם מתאפסים הם:

$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\frac{1}{2v}.\Gamma_{11}^{2}=-\frac{1}{2v},\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2v}$$

ולכן המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} u''+\frac{1}{v}u'v'=0 \\ v''-\frac{1}{2v}\left(u'\right)^{2}+\frac{1}{2v}\left(v'\right)^{2}=0 \end{cases}$$

בנוסף, יש לנו את המשוואה שנובעת מכך שהפרמטריזציה היא טבעית:

$$1=\left(\gamma'\right)^{t}\cdot G\cdot\left(\gamma'\right)=v\left(u'\right)^{2}+v\left(v'\right)^{2}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל:

$$\frac{u''}{u'} = -\frac{v'}{v}$$

נבצע אינטגרציה לפי t ונקבל:

$$\ln u = \int \frac{u''}{u'} dt = \int -\frac{v'}{v} dt = -\ln v + \ln C$$

כאשר $\ln C$ קבוע בנוהל. נקבל, אם כך:

$$u' = \frac{C}{v}$$

נציב זאת במשוואה השלישית:

$$1 = v\left(\frac{C}{v}\right)^2 + v\left(v'\right)^2$$

ולכן:

$$v' = \frac{\sqrt{v - C^2}}{v}$$

כעת, נתבונן ב:

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{u'}{v'} = \frac{\frac{C}{v}}{\frac{\sqrt{v-C^2}}{v}} = \frac{C}{\sqrt{v - C^2}}$$

לכן: $du = \frac{C}{\sqrt{v-C^2}} dv$. אם כן:

$$u = \int du = \int \frac{C}{\sqrt{v - C^2}} dv = 2C\sqrt{v - C^2} + B$$

ולכן הקווים הגיאודזיים הם מהצורה:

$$\gamma(t) = \left(2C\sqrt{t - C^2} + B, t\right)$$

משוואות אוילר לגרנאז':

כשאנו רוצים (מי מאיתנו לא רוצה) למצוא נקודת קיצון (אקסטרמום) לפונקציה, אנו גוזרים ומשווים ל-0 (ובודקים לאחר מכן בעזרת קריטריון סילבסטר האם זו נקודת קיצון או שמא אמת נכון הדבר, נעשתה הנקודה הזו אוכף בישראל).

מה נעשה כשנידרש למצוא קיצון לפונקציונל, שמקבל כקלט פונקציות? נשתמש במשוואות אוילר לגרנאז'.

משוואות אוילר לגרנאז' הן משוואות דיפרנציאליות, המוגדרות על ה**לגארנז'יאן**.

הפונקציונל שלנו הוא:

$$S(\gamma) = \int_a^b L(\gamma, \gamma')dt$$

והלגראנז'יאן הוא האינטגרנד.

המשוואות הן:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\gamma'\right)^i}\right) = \frac{\partial L}{\partial \gamma^i}$$

<u>לדוגמה:</u>

נחפש f גזירה בתחום $[a,b]$ כך ש: $f(a) = c, f(b) = d$ עבורה אורך הגרף הוא מינימלי.

כמו שהסביר אוקלידס, אנו יודעים שמדובר על קו ישר. נראה זאת לפי משוואות אוילר לגראנז'.

הפונקציונל שלנו במקרה זה הוא אורך הגרף, שנתון לפי הנוסחה:

$$S(f) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

ולכן הלגראנז'יאן הוא:

$$L\left(f,f'\right)=\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}$$

כעת:

$$\frac{\partial L}{\partial f'}=\frac{f'(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}},\frac{\partial L}{\partial f}=0$$

ולכן ממשוואת אוילר לגראנז' נקבל:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}\right)=0$$

כלומר:

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}}=C$$

ומכאן אפשר לראות ש־$f'(x)=B$ קבועה, ולכן f קו ישר.

<u>הערות:</u>

1. גם כשחישבנו באינפי 3 קיצון תחת אילוץ השתמשנו בפונקציה שנקראה לגראנז'יאן. האם לדעתכם יש קשר בין הפונקציות?

2. אין ספק שמציאת קיצון לפונקציונל היא בעיה שנדרשים אליה רבות; הדוגמה שנתנו היא הפשוטה ביותר וכבר אומרת משהו חשוב ־ המרחק הקצר היותר בין שתי נקודות הוא קו ישר. התחום העוסק בבעיות אלו נקרא חשבון וריאציות.

מה הקשר בין קיצון של פונקציונל לעקומות גיאודיות בהן עסקנו?

עקומה גיאודזית היא העקומה הקצרה ביותר בין שתי נקודות על המשטח, וראינו שאורך עקומה הוא פונקציונל.

אם כן, בעזרת משוואות אוילר לגראנז' אפשר למצוא גיאודזים, באופן הבא:

$$L\left(\gamma,\gamma'\right)=\frac{1}{2}\left\|\gamma'\right\|=\frac{1}{2}g_{ij}(\gamma)\left(\gamma'\right)^{i}\left(\gamma'\right)^{j}$$

זהו הלגראנז'יאן. הפונקציונל הוא:

$$S(\gamma)=\int\limits_{a}^{b}L(\gamma,\gamma')dt$$

והמשוואות הן:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\gamma'\right)^{i}}\right)=\frac{\partial L}{\partial\gamma^{i}}$$

כמו שראינו.

המשוואות האלו מוצאות קיצון לפונקציונל הנ"ל, כלומר הן שקולות למשוואות הגיאודזיות (שהרי העקומות הגיאודזיות הן הן הקיצון של הפונקציונל).

נשים לב שאם העקומה בפרמטריזציה טבעית, הלגראנז'יאן קבוע:

$$L=\frac{1}{2}\left\|\gamma'\right\|=\frac{1}{2}$$

וזו משוואה נוספת, ששקולה למשוואה שקיבלנו מכך שהפרמטריזציה טבעית.

<u>תרגיל:</u>

מצאו את הקווים הגיאודזיים על הטורוס:

$$X(\theta,\phi)=((R+r\cos\theta)\cos\phi,(R+r\cos\theta)\sin\phi,r\sin\theta)$$

באמצעות משוואות אוילר לגראנז'. אפשר להישאר בפתרון אינטגרלי.

<u>פתרון:</u>

המטריקה שלנו היא:

$$G=\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R+r\cos\theta)^2 \end{pmatrix}$$

לכן, הלגראנז'יאן הוא:

$$L(\theta,\theta',\phi,\phi')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \theta' & \phi' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & (R+r\cos\theta)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta' \\ \phi' \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}r^2\cdot(\theta')^2+\frac{1}{2}(R+r\cos\theta)^2(\phi')^2=\frac{1}{2}$$

כי הלגראנז'יאן שווה ל$-\frac{1}{2}$ כמו שהסברנו. לכן קיבלנו משוואה:

$$r^2\cdot(\theta')^2+(R+r\cos\theta)^2(\phi')^2=1$$

נכתוב את משוואות אוילר לגראנז':

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=(R+r\cos\theta)(-r\sin\theta)(\phi')^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta'}=r^2\theta'\Longrightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\theta'}\right)=r^2\theta''$$

ולכן המשוואה הראשונה היא:

$$r^2\theta''=(R+r\cos\theta)(-r\sin\theta)(\phi')^2$$

כמו כן:

$$\frac{\partial L}{\partial\phi}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi'} = (R + r\cos\theta)^2 \phi'$$

ולכן המשוואה השנייה היא:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi'}\right) = 0$$

כלומר:

$$(R + r\cos\theta)^2 \phi' = Const = p_\phi$$

מספר קבוע. הפיזיקאים מביניכם מזהים את p_ϕ כתנע הצמוד של ϕ.

אם כך, יש לנו בסך הכל שלוש משוואות:

$$\begin{cases} r^2 \cdot (\theta')^2 + (R + r\cos\theta)^2 (\phi')^2 = 1 \\ r^2\theta'' = (R + r\cos\theta)(-r\sin\theta)(\phi')^2 \\ (R + r\cos\theta)^2 \phi' = p_\phi \end{cases}$$

מהמשוואה השלישית אפשר לבודד את ϕ' ולקבל:

$$\phi' = \frac{p_\phi}{(R + r\cos\theta)^2}$$

נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל:

$$r^2 \cdot (\theta')^2 + (R + r\cos\theta)^2 \left(\frac{p_\phi}{(R + r\cos\theta)^2}\right)^2 = 1$$

נבודד את θ' ונקבל:

$$\theta' = \sqrt{\frac{(R + r\cos\theta)^2 - p_\phi^2}{r^2 (R + r\cos\theta)^2}} = \frac{\sqrt{(R + r\cos\theta)^2 - p_\phi^2}}{r(R + r\cos\theta)}$$

לכן, נוכל לכתוב:

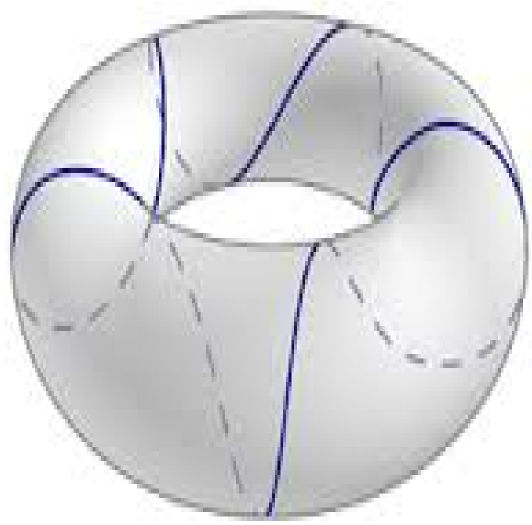
$$\frac{d\phi}{d\theta}=\frac{\frac{d\phi}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}}=\frac{\phi'}{\theta'}=\frac{\frac{p_\phi}{(R+r\cos\theta)^2}}{\frac{\sqrt{(R+r\cos\theta)^2-p_\phi^2}}{r(R+r\cos\theta)}}=\frac{rp_\phi}{(R+r\cos\theta)\sqrt{(R+r\cos\theta)^2-p_\phi^2}}$$

ולכן $d\phi=\frac{rp_\phi}{(R+r\cos\theta)\sqrt{(R+r\cos\theta)^2-p_\phi^2}}d\theta$. לפיכך:

$$\phi=\int d\phi=\int\frac{rp_\phi}{(R+r\cos\theta)\sqrt{(R+r\cos\theta)^2-p_\phi^2}}d\theta$$

וזהו פתרון אינטגרלי.

עקומה גיאודזית לדוגמה על הטורוס היא:



נפתור כמה תרגילים קצרים על עקומות גיאודזיות, מנקודת המבט הבסיסית שבה עקומה גיאודזית היא עקומה שהנורמל שלה מקביל לנורמל למשטח.

<u>תרגיל:</u>

יהי M משטח רגולרי ב$-\mathbb{R}^3$ שהוא סימטרי ביחס למישור π, ותהי γ עקומת החיתוך של M עם המישור π.

הוכיחו ש$-\gamma$ עקומה גיאודזית.

<u>פתרון:</u>

על ידי איזומטריה נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות שהמישור שלנו הוא המישור $\{z=0\}$.

תהי p נקודה על העקומה γ ותהי:

$$\alpha(s)=(x(s),y(s),z(s))$$

עקומה על המשטח המקיימת $\alpha(0)=p$, אך לא נמצאת כולה במישור π.

מכיוון שהמשטח סימטרי ביחס למישור, נקבל שגם העקומה:

$$\beta(s)=(x(s),y(s),-z(s))$$

נמצאת על המשטח. אי לכך, הנורמל למשטח $\vec{n}=(a,b,c)$ מאונך לוקטורים המשיקים לשתי העקומות:

$$\begin{cases} 0=\langle\vec{n},\alpha\rangle=ax'+by'+cz' \\ 0=\langle\vec{n},\beta\rangle=ax'+by'-cz' \end{cases}$$

נחסר את המשוואות זו מזו ונקבל:

$$2cz'=0$$

אפשר לבחור את α להיות עקומה כזו שעבורה $z'\neq 0$ ולכן $c=0$.

כלומר, הנורמל הוא: $\vec{n}=(a,b,0)$. לכן הנורמל נמצא במישור π.

העקומה שלנו מישורית, לכן הנורמל שלה נמצא גם הוא במישור π ולכן הנורמל למשטח מקביל לנורמל לעקומה בכל נקודה ולכן γ עקומה גיאודזית.

<u>תרגיל:</u>

תהי γ עקומה רגולרית על משטח M. נניח ש$-\gamma$ עקומה גיאודזית. הוכיחו ש$-\gamma$ קו עקמומיות אם ורק אם γ מישורית.

<u>פתרון:</u>

נזכור ש$-\gamma$ קו עקמומיות פירוש הדבר שהוקטור המשיק לעקומה הוא וקטור עצמי של אופרטור הצורה, כלומר:

$$S\left(\gamma'(s)\right) = \lambda(s)\gamma'(s)$$

כמו כן, נזכור שעקומה היא מישורית אם $\tau = 0$, הפיתול הוא אפס בכל נקודה.

אם כן, אנו יודעים ש$-\gamma$ עקומה גיאודזית. לכן, הנורמל למשטח $\vec{n}\left(\gamma(s)\right)$ מקביל לנורמל $\hat{N}(s)$ לעקומה בכל נקודה.

שני וקטורי הנורמל הם וקטורי יחידה, ווקטורי יחידה מקבילים זהים עד כדי סימן. בלי הגבלת הכלליות:

$$\hat{N}(s) = \vec{n}\left(\gamma(s)\right)$$

אנו רוצים למצוא קשר אל הפיתול, ולכן נכוון אל משוואות פרנה סרה. נגזור את שני האגפים:

$$\hat{N}'(s) = \frac{d}{ds}\left(\vec{n}\left(\gamma(s)\right)\right) = d\vec{n}\left(\gamma(s)\right)\gamma'(s) = -S\gamma'(s) = -S\hat{T}(s)$$

השתמשנו בכלל השרשרת, בהגדרת אופרטור הצורה (הנגדי של הדיפרנציאל) ובסימון $\gamma'(s) = \hat{T}(s)$.

מאידך גיסא, לפי משוואות פרנה סרה:

$$\hat{N}'(s) = -k(s)\hat{T}(s) + \tau(s)\hat{B}(s)$$

כאשר k העקמומיות ו$-\hat{B}$ וקטור הבי־נורמל.

אם כן, משתי המשוואות האחרונות נקבל:

$$-S\hat{T}(s) = -k(s)\hat{T}(s) + \tau(s)\hat{B}(s)$$

כעת, נניח ש$-\gamma$ היא קו עקמומיות. כלומר, $\gamma'(s) = \hat{T}(s)$ הוא ו"ע של S. לכן,

$$S\hat{T}(s) = \lambda(s)\hat{T}(s)$$

נציב זאת במשוואה:

$$-\lambda(s)\hat{T}(s) = -k(s)\hat{T}(s) + \tau(s)\hat{B}(s)$$

ומכיוון שהוקטורים $\hat{B}, \hat{T}$ הם (מאונכים ו) בלתי תלויים ליניארית, בצירוף ליניארי שלהם שמתאפס בהכרח המקדמים מתאפסים, כלומר:

$$\tau(s) = 0$$

ולכן העקומה מישורית.

לכיוון השני, נניח שהעקומה מישורית. לכן $\tau(s) = 0$, ולכן:

$$-S\hat{T}(s) = -k(s)\hat{T}(s)$$

ולכן $\gamma'(s) = \hat{T}(s)$ הוא וקטור עצמי של S (עם ערך עצמי k), ולכן γ קו עקמומיות.

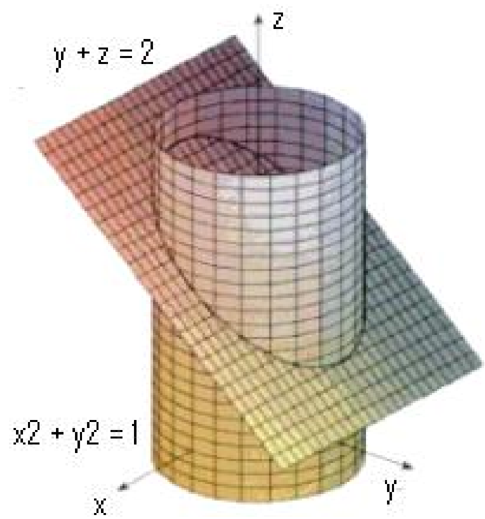
<u>תרגיל:</u>

עקומה γ נוצרת על ידי חיתוך הגליל $x^2+y^2 = 1$ עם מישור העובר דרך ראשית הצירים, כך שהזווית בין האנך למישור לבין ציר ה$-z$ היא θ.

מהי צורת העקומה?

<u>פתרון:</u>

חיתוך כזה לדוגמה הוא:



במקרה שלנו המישור עובר בראשית; בכל אופן ניתן לראות שעקומת החיתוך היא אליפסה.

יש לנו סימטריה ביחס לסיבוב סביב ציר ה$-z$, ולכן בלי הגבלת כלליות אפשר להניח שהנורמל למישור $\vec{n}$ נמצא כולו במישור $\{y=0\}$.

הזווית בין $\vec{n}$ לבין ציר ה$-z$ היא θ ולכן:

$$\vec{n} = (\sin\theta, 0, \cos\theta)$$

כל הוקטורים במישור מאונכים לנורמל, כמובן, ולכן:

$$0 = \langle \vec{n}, (x,y,z) \rangle = x\sin\theta + z\cos\theta$$

ולכן:

$$z = -x\tan\theta$$

כמו כן, על הגליל מתקיים:

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

ולכן פרמטריזציה של העקומה, שנמצאת גם על המישור וגם על הגליל, היא:

$$\gamma(t)=\left(t,\sqrt{1-t^2},-t\tan\theta\right)$$

אנו רוצים להראות שפרמטריזציה זו מתארת אליפסה. נציב $t=\cos\phi$ ונקבל:

$$\gamma(\phi)=(\cos\phi,\sin\phi,-\cos\phi\tan\theta)$$

אם נסובב את העקומה ב$-\theta$ מעלות סביב ציר y (מה שלא משנה את צורת העקומה) נקבל:

$$\tilde{\gamma}(\phi)=\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ -\cos\phi\tan\theta\end{pmatrix}=\left(\frac{\cos\phi}{\cos\theta},\sin\phi,0\right)$$

וזו אכן אליפסה.

כיוון אסימפטוטי:

יהי M משטח. וקטור $v\in T_p(M)$ נקרא כיוון אסימפטוטי אם $II(v,v)=0$.

אם עקומה γ על המשטח היא עקומה גיאודזית שכיוונה אסימפטוטי בכל נקודה, כלומר $II\left(\gamma',\gamma'\right)=0$, אז γ קו ישר.

חזרה למבחן:

נפתור תרגילים ממבחנים שונים.

שאלה 2 סמסטר א' מועד א' תשע"א:

בקואורדינטות $\left(u^1,u^2\right)=(x,y)$, נניח $f(x,y)=\frac{9}{y}$. נתבונן במטריקה המוגדרת על ידי:

$$f^2(x,y)\left(dx^2+dy^2\right)$$

א. חשבו את המקדמים Γ^1_{ij}.

ד. חשבו את k, העקמומיות של המטריקה.

<u>פתרון:</u>

א. המטריקה שלנו היא:

$$G=\begin{pmatrix}\frac{81}{y^2} & 0\\ 0 & \frac{81}{y^2}\end{pmatrix}$$

לכן:

$$G^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{y^2}{81} & 0\\ 0 & \frac{y^2}{81}\end{pmatrix},\frac{\partial G}{\partial x}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\frac{\partial G}{\partial y}=\begin{pmatrix}-\frac{162}{y^3} & 0\\ 0 & -\frac{162}{y^3}\end{pmatrix}$$

נשתמש בנוסחה של מקדמי כריסטופל:

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}g^{km}\left(g_{mi,j}+g_{mj,i}-g_{ij,m}\right)$$

ונקבל:

$$\Gamma^1_{11}=0,\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=-\frac{1}{y},\Gamma^1_{22}=0$$

ד. נתונה לנו המטריקה בלבד, ולכן נשתמש במשפט הנפלא:

$$k=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2}-\Gamma^2_{12,1}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}-\left(\Gamma^2_{12}\right)^2\right)$$

לשם כך אנחנו צריכים את מקדמי כריסטופל Γ^2_{ij}. לפי הנוסחה מקבלים:

$$\Gamma^2_{11}=\frac{1}{y},\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=0,\Gamma^2_{22}=-\frac{1}{y}$$

ומהמשפט הנפלא נקבל:

$$k = \frac{y^2}{81}\left(-\frac{1}{y^2} + 0 - 0 + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{81}$$

*לתרגיל יש עוד שני סעיפים של הגדרות, המבחן לא היה עם חומר פתוח.

<u>שאלה 1 סמסטר א' מועד ב' תשס"ט:</u>

בעיה זו עוסקת בעקומות במרחב אוקלידי.

ב. נתבונן בעקומה:

$$\alpha(t) = (8\cos t, 10 - 10\sin t, -6\cos t)$$

מצאו פרמטר s במהירות יחידה של העקומה.

ג. חשבו את העקמומיות של העקומה.

<u>פתרון:</u>

ב. וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (-8\sin t, -10\cos t, 6\sin t)$$

ולכן:

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{64\sin^2 t + 100\cos^2 t + 36\sin^2 t} = 10$$

והמהירות שונה מ-1. אם כן, הפרמטר s שלנו הוא:

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(x)\|\, dx = \int_0^t 10dx = 10t$$

נבטא את t כפונקציה של s:

$$t(s) = \frac{s}{10}$$

והעקומה בפרמטריזציה החדשה תהיה:

$$\alpha(s) = \left(8\cos\frac{s}{10}, 10 - 10\sin\frac{s}{10}, -6\cos\frac{s}{10}\right)$$

קל לראות שאכן $\|\alpha'(s)\| = 1$.

ג. נוכל להשתמש בפרמטריזציה הטבעית שמצאנו בסעיף הקודם, ולכן:

$$k = \|\alpha''(s)\|$$

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{8}{100}\cos\frac{s}{10}, \frac{10}{100}\sin\frac{s}{10}, \frac{6}{100}\cos\frac{s}{10}\right)$$

ואם כן:

$$k = \|\alpha''(s)\| = \sqrt{\frac{64}{10000}\cos^2\frac{s}{10} + \frac{100}{10000}\sin^2\frac{s}{10} + \frac{36}{10000}\cos^2\frac{s}{10}} = \frac{1}{10}$$

וזו העקמומיות.

*בשאלה סעיף נוסף של הגדרות.

<u>שאלה 2 סמסטר ב' מועד א' תשע"ג:</u>

עקומים ב-$\mathbb{R}^2$.

א. נתון העקום $\gamma(t) = (\sin kt, \cos nt)$, כאשר k, n שונים מאפס.

מהו התנאי על k, n כדי שהעקום יהיה רגולרי?

ב. מהו העקום המתואר (בחלקו) על ידי $\gamma(t) = (\sin 2t, \cos t)$?

ג. מהי עקמומיות העקום מסעיף ב'?

<u>פתרון:</u>

א. העקום אינו רגולרי כאשר $\gamma' = 0$, כלומר:

$$(\sin kt)' = 0 \wedge (\cos nt)' = 0$$

כלומר $\cos kt = 0$ וגם $\sin nt = 0$.

$\cos kt = 0$ פירושו $kt = \frac{\pi}{2} + m_1\pi$.

$\sin nt = 0$ פירושו $nt = m_2\pi$.

העקום לא רגולרי במקרים אלה, כלומר כאשר:

$$\frac{k}{n} = \frac{kt}{nt} = \frac{\frac{\pi}{2} + m_1\pi}{m_2\pi} = \frac{2m_1 + 1}{2m_2}$$

נוכל לנסח זאת כך: אם בהצגה כשבר מצומצם של $\frac{k}{n}$ המונה אי זוגי והמכנה זוגי אז העקום לא רגולרי.

אחרת, העקום רגולרי.

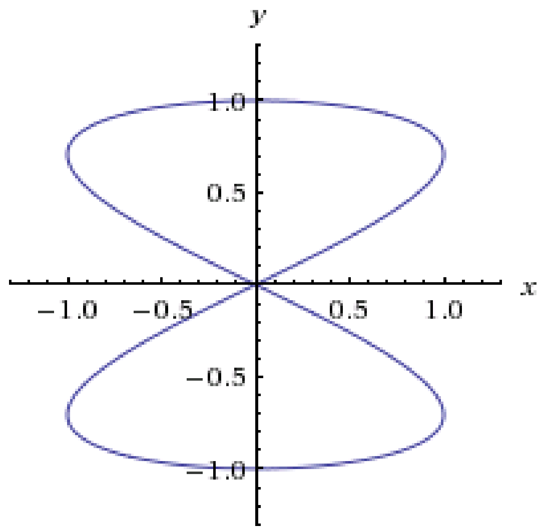
ב. ננסה להביע את אחד המשתנים באמצעות השני:

$$x = \sin 2t = 2\sin t \cos t = 2\sqrt{1 - \cos^2 t}\cos t = 2\sqrt{1 - y^2}y$$

ולכן:

$$x^2 = 4y^2\left(1 - y^2\right)$$

תשובה זו מספיקה. העקום הוא היצור החביב הזה:



ג. נחשב את וקטורי הנגזרות הראשונה והשנייה:

$$\gamma'(t) = (2\cos 2t, -\sin t)\,, \gamma''(t) = (-4\sin 2t, -\cos t)$$

וכעת:

$$k = \frac{\det(\gamma', \gamma'')}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 2\cos 2t & -4\sin 2t \\ -\sin t & -\cos t \end{vmatrix}}{\left(\sqrt{4\cos^2 2t + \sin^2 t}\right)^3} = \frac{-2\cos 2t\cos t - 4\sin 2t\sin t}{\left(4\cos^2 2t + \sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

אפשר אולי לשחק קצת עם זהויות טריגונומטריות; תשובה זו מספיקה.

*עקום הוא עקומה.

<u>שאלה 4 סמסטר ב' מועד א' תשע"ג:</u>

תהי α עקומה הנתונה על ידי:

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)$$

א. מצאו פרמטריזציה טבעית לעקומה.

ב. חשבו את העקמומיות והפיתול של העקומה.

ג. חשבו את אורך העקומה בטווח $[0,2\pi]$.

<u>פתרון:</u>

א. וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)$$

לכן:

$$\|\alpha'(t)\|=\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2+\frac{1}{3}\sin^2 t+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}\sin^2 t-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t\cos t+\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{3}\sin^2 t+\frac{1}{3}\sin^2 t+\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t\cos t+\frac{1}{2}\cos^2 t}=$$

$$=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}=1$$

והפרמטריזציה הזו של העקומה היא היא פרמטריזציה במהירות יחידה.

לשם הנוחות נסמן את הפרמטר ב$-s$:

$$\alpha(s)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\right)$$

ב. מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, נוכל להשתמש בנוסחה:

$$k=\|\alpha''(s)\|$$

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\alpha''(s)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s,-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s,-\frac{1}{\sqrt{3}}\cos s+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin s\right)$$

ובדומה לחישוב שעשינו בסעיף הראשון, ניתן לראות ש:

$$k = \|\alpha''(s)\| = 1$$

את הפיתול אפשר לחשב לפי הנוסחה או לפי משוואות פרנה סרה:

$$\hat{N}' = -k\hat{T} + \tau\hat{B} \Longrightarrow \hat{N} + k\hat{T} = \tau\hat{B}$$

כעת:

$$\hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\left\|\hat{T}'\right\|} = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \alpha'' \Longrightarrow \hat{N}' = \alpha'''$$

לכן נוכל לרשום:

$$\alpha''' + k\hat{T} = \tau\hat{B}$$

אלא ש־$k = 1$ ו־$\hat{T} = \alpha'$ ולכן:

$$\alpha''' + \alpha' = \tau\hat{B}$$

$\alpha''' + \alpha' = 0$, ומכיוון שוקטור הבי־נורמל לא מתאפס, $\tau = 0$.

אפשר לתקוף זאת גם מכיוון אחר; אנו יודעים שאת הפיתול אפשר לחשב באמצעות הנוסחה:

$$\tau = \frac{\det\left(\alpha', \alpha'', \alpha'''\right)}{k^2} = \frac{\det\left(\alpha', \alpha'', \alpha'''\right)}{\|\alpha' \times \alpha''\|}$$

כאשר הנוסחה הימנית היא כללית והנוסחה השמאלית כאשר הפרמטריזציה טבעית.

מכיוון ש־$\alpha''' = -\alpha'$ ובפרט הם תלויים ליניארית, $\det\left(\alpha', \alpha'', \alpha'''\right) = 0$ ולכן:

$$\tau = 0$$

ג. לפי הנוסחה:

$$S=\int_0^{2\pi}\|\alpha'(s)\|\,ds=\int_0^{2\pi}ds=2\pi$$

מכיוון שהעקומה במהירות יחידה.

<u>שאלה 2 סמסטר א' מועד ב' תשס"ח:</u>

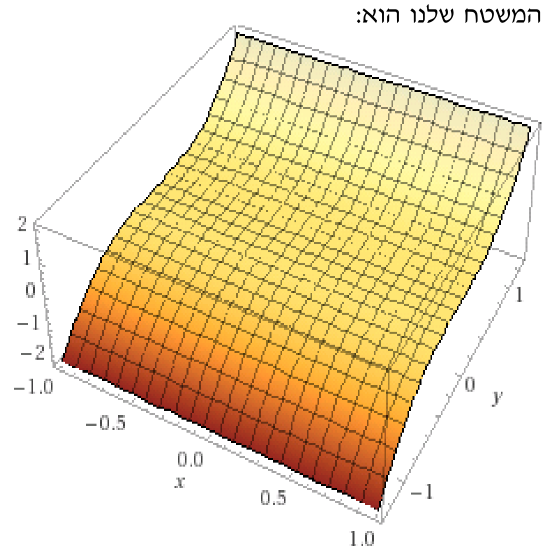
נתון המשטח הבא ב־$\mathbb{R}^3$: $M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|z=y^3\right\}$.

א. מהי עקמומיות גאוס k של M?

ב. הוכיחו שהקו $L=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|y=z=0\right\}$ הוא עקומה גיאודזית של M.

<u>פתרון:</u>

המשטח שלנו הוא:



א. פרמטריזציה של המשטח היא:

$$r(u,v)=\left(u,v,v^3\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=(1,0,0),r_v=\left(0,1,3v^2\right)$$

מקדמי המטריקה הן:

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = 1$$
$$g_{12} = g_{21} = \langle r_u, r_v \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = 1 + 9v^4$$

ולכן המטריקה היא:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + 9v^4 \end{pmatrix}$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$r_{uu} = \vec{0}, r_{uv} = r_{vu} = \vec{0}, r_{vv} = (0, 0, 6v)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3v^2 \end{vmatrix} = \left(0, -3v^2, 1\right)$$

$$\vec{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|} = \frac{\left(0, -3v^2, 1\right)}{\sqrt{1 + 9v^4}}$$

איברי המטריצה B הם:

$$b_{11} = b_{21} = b_{22} = \langle r_{uu}, \vec{n} \rangle = \langle r_{uv}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$b_{22} = \langle r_{vv}, \vec{n} \rangle = \frac{6v}{\sqrt{1 + 9v^4}}$$

לכן המטריצה היא:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}} \end{pmatrix}$$

אופרטור הצורה הוא:

$$S = G^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+9v^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+9v^4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{6v}{(1+9v^4)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

ולכן עקמומיות גאוס היא:

$$k = \det S = 0$$

שימו לב שמקומית המשטח די דומה למישור.

*כבר כשרואים ש$B-$ אינה הפיכה אפשר כמובן לומר שהעקמומיות היא 0.

ב. נשתמש במשוואות הגיאודזיות:

$$\begin{cases} (\gamma^1)'' + \Gamma^1_{ij}(\gamma^1)'(\gamma^2)' = 0 \\ (\gamma^2)'' + \Gamma^2_{ij}(\gamma^1)'(\gamma^2)' = 0 \end{cases}$$

מקדמי כריסטופל הם:

$$\Gamma^2_{22} = \frac{18v^3}{1+9v^4}$$

והשאר מתאפסים. המשוואות הן:

$$\begin{cases} (\gamma^1)'' = 0 \\ (\gamma^2)'' + \frac{18v^3}{1+9v^4}(\gamma^1)'(\gamma^2)' = 0 \end{cases}$$

ואם נדבר בשפת u,v:

$$\begin{cases} (u)''=0 \\ (v)''+\frac{18v^3}{1+9v^4}(v')^2=0 \end{cases}$$

על L, $y=z=0$, ולכן $v=0$ והמשוואה השנייה אכן מתקיימת.

נותרנו עם:

$$u''=0$$

לכן $u(t)=at+b$. כלומר, הקו הגיאודזי הוא:

$$\gamma(t)=(at+b,0,0)$$

ואם ניקח למשל $a=0,b=1$ אכן נקבל את L.

<u>שאלה 3 סמסטר א' מועד ב' תשס"ח:</u>

נתבונן במישור כאשר הוא מצויד בתבנית היסודית הראשונה:

$$(g_{ij})=e^{x+y}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. חשבו את מקדמי כריסטופל.

ב. האם הישר $y=x$ הוא עקומה גיאודזית?

ג. האם הישר $y=0$ הוא עקומה גיאודזית?

ד. האם הישר $x=1$ הוא עקומה גיאודזית?

<u>פתרון:</u>

א. מהגדרת המטריקה נקבל:

$$G^{-1}=\frac{1}{e^{x+y}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial y}=G$$

לפי הנוסחה נקבל:

$$\Gamma_{11}^{1} = \tfrac{1}{2}$$
$$\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \tfrac{1}{2}$$
$$\Gamma_{22}^{1} = -\tfrac{1}{2}$$
$$\Gamma_{11}^{2} = -\tfrac{1}{2}$$
$$\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \tfrac{1}{2}$$
$$\Gamma_{22}^{2} = -\tfrac{1}{2}$$

ב. המשוואות הגיאודזיות הן:

$$\begin{cases} x'' + \tfrac{1}{2}\left(x'\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(y'\right)^2 + x'y' = 0 \\ y'' - \tfrac{1}{2}\left(x'\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(y'\right)^2 + x'y' = 0 \end{cases}$$

נציב $y = x$ ונקבל:

$$x'' + \frac{1}{2}\left(x'\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x'\right)^2 + x'x' = 0$$

כלומר $x'' + \left(x'\right)^2 = 0$. נציב $z = x'$ ונקבל:

$$z' + z^2 = 0$$

קל לראות שהפתרון הוא מהצורה:

$$z = \frac{1}{t - C}$$

כאשר C קבוע. למתקדמים: ברנולי. אם כך:

$$x' = \frac{1}{t - C} \Longrightarrow x = \ln|t - C| + B$$

כאשר B קבוע. לכן העקומה הגיאודזית היא:

$$\gamma(t) = (\ln|t-C| + B, \ln|t-C| + B)$$

ג. נציב $y=0$ במשוואות הגיאודזיות ונקבל:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ \frac{1}{2}\left(x'\right)^2 = 0 \end{cases}$$

לכן $x'=0$ ולכן $x=A$ כאשר A קבוע. קיבלנו נקודה:

$$\gamma = (A, 0)$$

ולא עקומה ולכן זו לא עקומה גיאודזית.

ד. נציב $x=1$ וכמו בסעיף ג' נקבל שזו אינה עקומה גיאודזית.