

תרגיל 1

אינטגרלים וטורים

1. מצאו עבור אילו ערכי α האינטגרל $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$ מתכנס. לאילו ערכים הוא מתכנס בהחלט?

2. קבעו התכנסות של האינטגרלים הבאים:

$$(א) \int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x}$$

$$(ב) \int_1^\infty \frac{\cos^2 x}{x^\alpha}$$
 פצלו לפי ערכי α מתאימים.

3. השתמשו במבחן האינטגרל כדי לקבוע התכנסות של הטורים הבאים:

$$(א) \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$$

$$(ב) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}}$$

$$(ג) \sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n}}{2^n \sqrt{n}}$$

4. קבעו התכנסות לגבי הטורים הבאים (מתכנס בהחלט/מתבדר/מתכנס בתנאי):

$$(א) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n + 5}{3^n}$$

$$(ב) \sum_{n=2}^\infty \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

$$(ג) \sum_{n=1}^\infty \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$(ד) \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!}$$

$$(ה) \sum_{n=1}^\infty \frac{n! \alpha^n}{n^n}, \alpha > 0$$

$$(ו) \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$(ז) \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^4-n^2}}$$

5. יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי מתכנס. הוכיחו כי $\sum_{n=1}^\infty \frac{a_n a_{n+1}}{a_n + a_{n+1}}$ גם מתכנס.

6. יהיו $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ו $\sum_{n=1}^\infty b_n$ טורים. הוכיחו או הפריכו:

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ו $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס אזי גם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.

סדרות של פונקציות

1. בסדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקצית הגבול (אם קיימת), וקבעו האם ההתכנסות היא במידה שווה:

$$(א) f_n(x) = \cos^{2n}(x) \text{ בקטע } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$(ב) f_n(x) = \frac{\arctan(x)}{n} \text{ בכל } \mathbb{R}$$

$$(ג) f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \text{ בקטע } (0, \infty)$$

$$(ד) f_n(x) = x^2 + \frac{1}{x^2+n} \text{ בקטע } [0, 1]$$

$$(ה) f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \text{ בקטע } \left(\frac{1}{100}, \infty\right)$$