פתרון לתרגיל 3 (83-114 חדו"א 2)

1) חשבו את הגבולות הבאים או הוכיחו שאינם קיימים

(א) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

$$0 \leq \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)\right| \leq \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right| \leq \frac{x^2}{|x|} = |x| \to 0$$

אז לפי משפט סנדוויץ' הגבול הוא 0

(ב) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2+y^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\big|_{x=0} = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{(x,y)\to 0} f(x,y)\big|_{y=0} = \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1 \end{array}\right\}$$ הגבול לא קיים

(ג) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$0 \leq \left|(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x^2+y^2| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

אז לפי משפט סנדוויץ' הגבול הוא 0

(ד) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{xy}$$

ע"י החלפת משתנה $t=xy$, $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}}{xy} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t}{t}$$

$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^t}{t} = +\infty$ $\lim_{t\to 0^-} \frac{e^t}{t} = -\infty$ אז הגבול לא קיים

(ה) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-2y}{2x-3y}$

במסלול $y=0$ נקבל $\frac{3}{2}$ ובמסלול $x=0$ נקבל $\frac{2}{3}$
אז הגבול לא קיים.

(ו) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-|x-y|}{e^{x^2-2xy+y^2}}$

נסמן $t=x-y$ ואז $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-|x-y|}{e^{x^2-2xy+y^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{-|t|}{e^{t^2}} = 0$

2) קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$

(א) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\ln(y+1)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

במסלול $x=0$ נקבל $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$

במסלול $y=0$ נקבל $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \frac{1}{2}$

לכן הפונקציה לא רציפה ב: $(0,0)$

(ב) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$0 \leq \left|\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$

אז $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ רציפה

(ד) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^3+k^3x^3}{x^2+k^2x^2} = \frac{1}{1+k^2}$$

הגבול תלוי ב-k אז הוא לא קיים ולכן לא רציפה

(ה) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

3) מצאו את הגבולות החוזרים לפונקציות הבאות בנקודה (0,0)

(א) $f(x,y) = \frac{y^2}{x^4+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{y^2}{x^4+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x^4+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{0+y^2} = 1$$

(ב) $f(x,y) = \frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x\sin(1/x)+y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin(1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

לא קיים

Scanned with CamScanner

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=1$$

(ג) $$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}=0$$

4) עבור הפונקציות הבאות, בדקו האם הן דיפרנציאביליות ב-(0,0)

(א) $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}y\sin\left(\frac{1}{|y|}\right)=0$$

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$\Delta f=\underbrace{f_x(0,0)}_{0}\Delta x+\underbrace{f_y(0,0)}_{0}\Delta y+\underbrace{(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}_{\varepsilon(\Delta x,\Delta y)}$$

נסמן $t=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ אז $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{t\to 0} t^2\sin\frac{1}{t}=0$

לכן f דיפרנציאבילית

(ב) $$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^3}-0}{x}=1=f_x(0,0)$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{y^3}-0}{y}=1=f_y(0,0)$$

$$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\sqrt[3]{\Delta x^3+\Delta y^3}-0=\sqrt[3]{\Delta x^3+\Delta y^3}$$

נבדוק האם אפשר לכתוב Δf בצורה

$$\Delta f=f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$$

אז $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\sqrt[3]{\Delta x^3+\Delta y^3}-\Delta x-\Delta y$

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ \Delta x=0}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\Delta y\to 0}\varepsilon(0,\Delta y)=0$$

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to 0\\ \Delta x=\Delta y}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x,\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}(\sqrt[3]{2}-2)\Delta x=\sqrt[3]{2}-2\neq 0$$

לכן f לא דיפרנציאבילית

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ (ג)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$ לא קיים

אז הפונקציה לא רציפה ולכן לא דיפרנציאבילית

$$f(x,y)=(x+y)\sqrt{x^2+y^2}$$ (ד)

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0$$

$$\Delta f = f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\underbrace{f_x(0,0)\Delta x}_{0}+\underbrace{f_y(0,0)\Delta y}_{0}+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\Delta x,\Delta y)=(\Delta x+\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=0$$ אז f דיפרנציאבילית

5) מצאו את פיתוח טיילור לפונקציות הבאות:

(א) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ מסביב ל- $(1,0)$ מסדר 2

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad f_{xx}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad f_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad f_{xy}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$f_x(1,0)=1 \quad f_y(1,0)=0 \quad f_{xx}(1,0)=0 \quad f_{yy}(1,0)=1 \quad f_{xy}(1,0)=0$

לכן $f(x,y) = 1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2 + R_2$

(ב) $f(x,y)=e^{2x}\ln(1+y)$ מסביב ל-$(0,0)$ מסדר 4

$x\in\mathbb{R} \qquad e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} = \left(1+2x+2x^2+\frac{8x^3}{6}+\frac{16x^4}{24}+\dots\right)$

$-1\leqslant y\leqslant 1 \quad \ln(1+y)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{y^n}{n} = \left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\dots\right)$

$$f(x,y) = \left(1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{2}{3}x^4+\dots\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\dots\right)$$

$$f(x,y) = y+2xy-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+2x^2y-\frac{y^4}{4}+\frac{2}{3}xy^3-x^2y^2+\frac{4}{3}x^3y+R$$

6) חשבו את הנגזרת $\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1}$ כאשר $f(x,y,z)=x^3y^2z^4$ $(x,y,z)=(t^2,t+2,2t^4)$

ע"י הצבה: $f(t) = (t^2)^3(t+2)^2(2t^4)^4$

$$= t^6 \cdot 16t^{16}(t^2+2t+4)$$
$$= 16t^{24}+32t^{23}+64t^{22} = 16t^{22}(t+2)^2$$

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = 22\cdot 16\cdot t^{21}(t+2)^2+32t^{22}(t+2)\Big|_{t=1} = 3264$$

ע"י הכלל השרשרת:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{df}{dt} = 3x^2y^2z^4 \cdot 2t + 2x^3yz^4 \cdot 1 + 4x^3y^2z^3 \cdot 8t^3$$

כאשר $t=1$, $x=1,\ y=3,\ z=2$ ולכן

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=1} = 864 + 96 + 2304 = 3264$$

7) מצאו כל הנקודות במשטח $x^2+y^2-z^2=1$ כך שהמישור המשיק מקביל למישור $x+y+z=1$

נגדיר $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1$

$f_x = 2x \qquad f_y = 2y \qquad f_z = -2z$

ולכן המרמל למישור המשיק יהיה $(2x_0, 2y_0, -2z_0)$

המרמל למישור $x+y+z=1$ יהיה $(1,1,1)$
והשני וקטורים צריכים להיות תלויים לינארית

$$\Rightarrow \quad (2x_0, 2y_0, -2z_0) = \alpha(1,1,1)$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{\alpha}{2} \qquad y_0 = \frac{\alpha}{2} \qquad z_0 = -\frac{\alpha}{2}$$

ויש לנו $x_0^2+y_0^2-z_0^2 = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4} = 1$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \pm 2$$

ולכן נקבל שתי נקודות $(1,1,-1)\ ,\ (-1,-1,1)$

8) חשבו את הנגזרת של $f(x,y)=xy^2z^3$
בכוון $h=(4,3,0)$ בנקודה $a=(3,2,1)$

$f_x = y^2z^3 \qquad f_y = 2xyz^3 \qquad f_z = 3xy^2z^2$

$\nabla f(3,2,1) = (4,12,36)$

ננרמל את וקטור הכוון: -

$$\vec{n} = \frac{h}{\|h\|} = \frac{h}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

$$D_h f(3,2,1) = (4,12,36)\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{52}{5}$$