יריעות

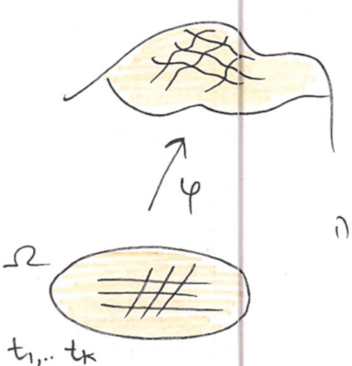
ניתנות להצגה ב-2 אופנים

הצגה סתומה

אוסף פתרונות של משוואות $\begin{cases} g_1=0 \\ \vdots \\ g_m=0 \end{cases}$

היריעה מוגדרת באופן עקיף ע"י אילוץ

פרמטרזציה



אטלס- כל מפה מגדירה מערכת קואורדינטות

↓

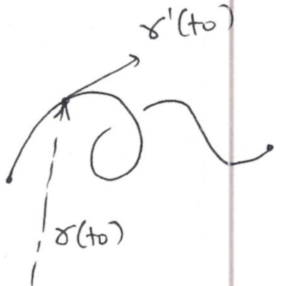
זה נותן הצגה ישירה של היריעה

יריעות 1-מימדיות - עקומות:

פרמטרזציה של עקומה: העתקה C^k

$$\gamma:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \longrightarrow (\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$$

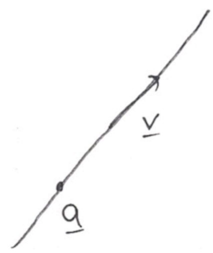
"פרמטר זמן" "מיקום"



וקטור משיק לעקומה: $\gamma'(t)=(\gamma_1',\dots,\gamma_n')$

דוגמאות:

① **קו-ישר** ב-$\mathbb{R}^n$

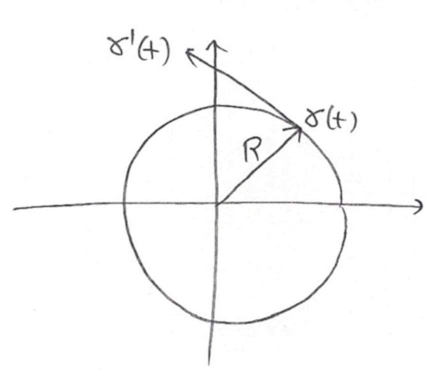


בשביל פרמטרזציה צריך:
נקודה על הישר $\underline{a}$
וקטור כיוון על הישר $\underline{v}$

←

$$\gamma(t)=\underline{a}+t\cdot\underline{v}$$
$$\gamma:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^n$$
$$\Downarrow$$
$$\gamma'(t)=\underline{v}$$

② **מעגל** ברדיוס R ב-$\mathbb{R}^2$:



$$\gamma:[0,2\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$t\longrightarrow(R\cos t, R\sin t)$$
$$\Downarrow$$
$$\gamma'(t)=(-R\sin t, R\cos t)$$

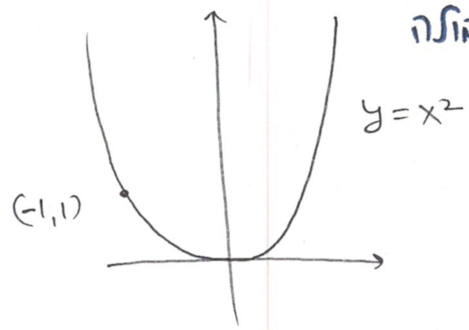
← זה בדיוק הוקטור שמתקבל מסיבוב $\gamma(t)$ ב-$+90°$

כי באופן כללי:

$$(x,y) \underset{\text{סיבוב ב-}+90°}{\rightsquigarrow} (-y,x)$$

* γ אינה מפה משום שהתחום אינו קבוצה פתוחה.
אם נשנה את התחום ל-$(0,2\pi)$ γ לא תהיה על.
באטלס שמכסה את המעגל צריכות להיות לפחות 2 מפות.

③ פרבולה



$\downarrow$

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longrightarrow (t, t^2)$$

נשים לב - כאשר אחד המשתנים מבודד במשוואה זה אומר שהמשטח הוא גרף של פונקציה.

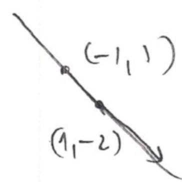
$\downarrow$

במקרה כזה תמיד ישנה פרמטרזציה פשוטה.

תרגול: מצא את משוואת הישר המשיק לפרבולה בנקודה $(-1,1)$

פתרון: על מנת לקבל וקטור כיוון של הישר נחשב את הווקטור המשיק $\gamma'(t)=(1,2t)$. בנקודה המתאימה $t=-1 \Leftarrow$ $\gamma'(-1)=(1,-2)$

סה"כ נקבל

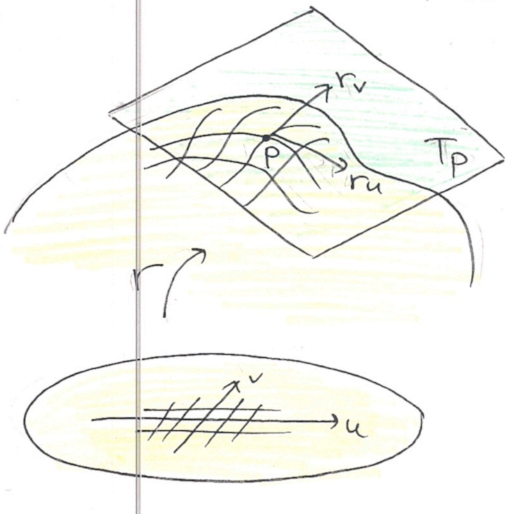


והפרמטרזציה:

$$l(k)=(-1,1)+k(1,-2)$$
$$l(k)=(-1+k,1-2k)$$

יריעות 2-מימדיות - משטחים

הגדרת משטח באמצעות פרמטריזציה - בכדי להגדיר צורה 2-מימדית נזדקק ל-2 פרמטרים



$\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$r: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longrightarrow (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v))$$

המישור המשיק למשטח r בנקודה p -

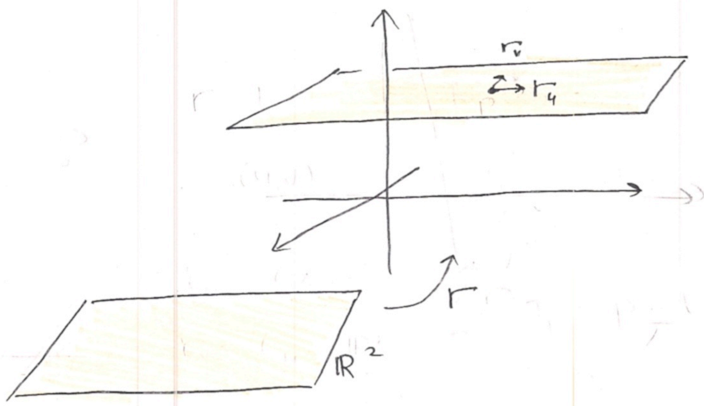
$$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} \qquad r_v = \frac{\partial r}{\partial v}$$

הוא המישור הנפרש ע"י הווקטורים:

ועובר דרך הנקודה p.

דוגמאות:

(1) **מישור** $z=6$



$$r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longrightarrow (u,v,6)$$

$r_u = (1,0,0)$

$r_v = (0,1,0)$

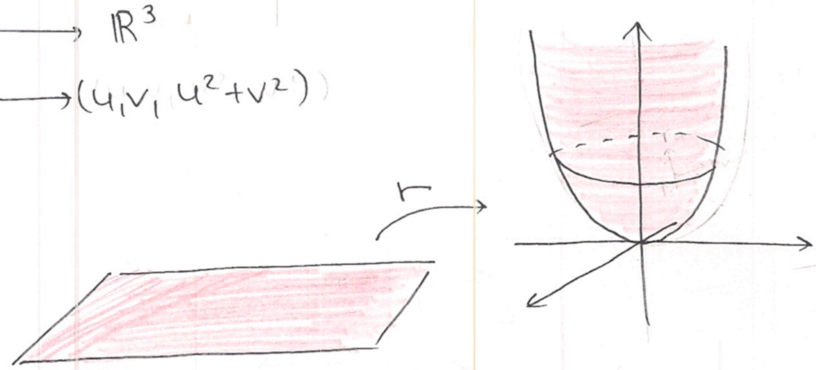
$T_p = p + t(1,0,0) + k(0,1,0)$

(2) **פרבולואיד**

$z = x^2 + y^2$

$$r: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v) \longrightarrow (u,v,u^2+v^2)$$



תרגיל - מצא הצגה פרמטרית של המישור המשיק למשטח בנקודה $p=(1,1,2)$

פתרון: $(u,v,u^2+v^2) = (1,1,2) \rightarrow u=1 \quad v=1$

$r_u = (1,0,2u)$

$r_v = (0,1,2v)$

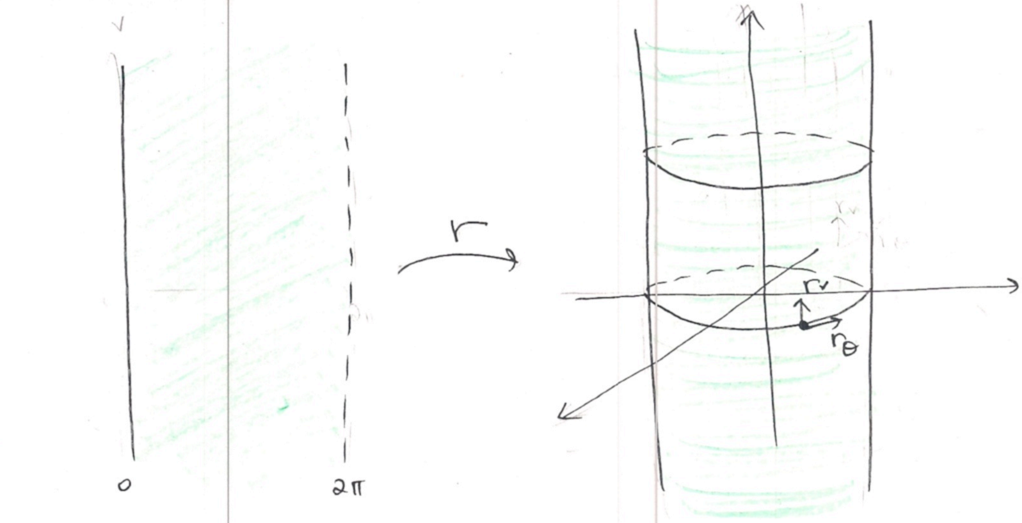
$r_u(p) = (1,0,2) \quad r_v(p) = (0,1,2)$

$T_p = (1,1,2) + t(1,0,2) + k(0,1,2)$

③ המשטח $x^2+y^2=9$

$\downarrow$

גליל ברדיוס 3



ראינו כבר שניתן להציגו ע"י מספר גרפים...

$\downarrow$

פרמטריזציה נוחה יותר תהיה באמצעות זווית

$$\Omega=\left\{(\theta,v)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix}-\infty\le v\le\infty\\ 0\le\theta<2\pi\end{matrix}\right\}$$

$$r:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(\theta,v)\longrightarrow(3\cos\theta,\,3\sin\theta,\,v)$$

<u>תרגיל:</u> מצאו הצגה פרמטרית של המישור המשיק למשטח בנק' $(\frac{3}{\sqrt2},\frac{3}{\sqrt2},0)$

<u>פתרון:</u> $(\frac{3}{\sqrt2},\frac{3}{\sqrt2},0)=(3\cos\theta,3\sin\theta,v)$

$\downarrow$

$\theta=\frac{\pi}{4}\quad v=0$

$r_\theta=(-3\sin\theta,\,3\cos\theta,\,0)$

$r_v=(0,0,1)$

$\downarrow$

בנק' הנתונה: $r_\theta=(-\frac{3}{\sqrt2},\frac{3}{\sqrt2},0)$

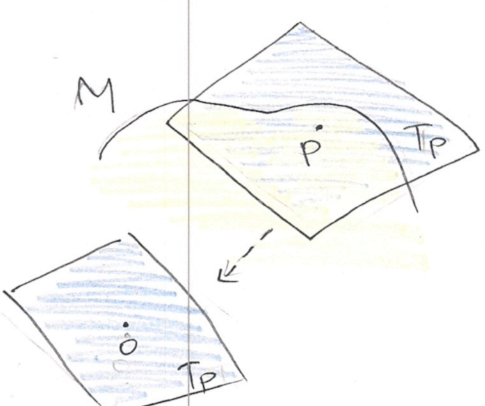
$\downarrow$

$$\Pi=(\tfrac{3}{\sqrt2},\tfrac{3}{\sqrt2},0)+t(-\tfrac{3}{\sqrt2},\tfrac{3}{\sqrt2},0)+k(0,0,1)$$

באופן כללי יותר, ליריעה בכל מימד, נגדיר:

מרחב משיק ליריעה M בנקודה p-

אוסף כל הוקטורים המשיקים ליריעה ב-p.



*בהגדרה זו מתייחסים ל-p כראשית הצירים במרחב T_p

וזה הופך את T_p למרחב וקטורי (כי הוא עובר ב-0)

אם $r:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}^n$ פרמטריזציה של היריעה ה-k מימדית

$$(t_1,..t_k)\longrightarrow(r_1,...r_n)$$

$$T_p=Sp\left\{\frac{\partial r}{\partial t_1},\frac{\partial r}{\partial t_2},..\frac{\partial r}{\partial t_k}\right\}$$