<u>תזכורת: גבולות וגבולות חד-צדדיים</u>

- הגדרנו **<u>גבול</u>** בנקודה x_0 ע"י $st\big(f(x_0+\Delta x)\big)$, בהנחה שיש אותו הערך לכל $0 \approx \Delta x \neq 0$.
לגבול אפשר לקרוא גם *<u>גבול דו-צדדי</u>* כשרוצים להדגיש שלא מדובר על הגבולות החד-צדדים מהסעיפים הבאים.
- הגדרנו **<u>גבול חד-צדדי ימני</u>** בנקודה x_0 ע"י $st\big(f(x_0+\Delta x)\big)$, בהנחה שיש אותו הערך לכל $0 \approx \Delta x > 0$.
- הגדרנו **<u>גבול חד-צדדי שמאלי</u>** בנקודה x_0 ע"י $st\big(f(x_0+\Delta x)\big)$, בהנחה שיש אותו הערך לכל $0 \approx \Delta x < 0$.
- ראינו כי גבול קיים בנקודה אמ"מ קיימים הגבולות החד-צדדיים משמאל ומימין והם שווים. במילים אחרות:
  - אם קיים גבול, אז קיימים גם הגבולות החד-צדדיים משמאל ומימין, והם שווים זה לזה.
  - אם קיימים הגבולות החד-צדדיים מימין ומשמאל והם שווים לזה, אז קיים הגבול.

<u>דוגמא:</u> מהם הגבולות החד-צדדיים בנקודה $x_0 = 0$ של הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$?

<u>גבול מימין:</u> יש לחשב את $st\left(e^{\frac{1}{\Delta x}}\right)$ באשר Δx אינפי' חיובי. כאשר Δx אינפי' חיובי אז $\frac{1}{\Delta x}$ אינסופי חיובי ואז גם $e^{\frac{1}{\Delta x}}$ אינסופי חיובי (תרגיל), לכן אין חלק סטנדרטי, כלומר *<u>הגבול מימין לא קיים</u>*.

<u>גבול משמאל:</u> יש לחשב את $st\left(e^{\frac{1}{\Delta x}}\right)$ באשר Δx אינפי' שלילי. כאשר Δx אינפי' שלילי אז $\frac{1}{\Delta x}$ אינסופי שלילי, לשם נוחות נרשום $\frac{1}{\Delta x} = -H$ עבור H אינסופי חיובי. ואז $e^{\frac{1}{\Delta x}} = e^{-H} = \frac{1}{e^H}$ כלומר משמעותי חלקי אינסופי כלומר אינפי'. לכן החלק הסטנדרטי הוא 0. כלומר *<u>הגבול משמאל שווה 0</u>.*

<u>תזכורת: רציפות בנקודה (רציפות נקודתית)</u>

- הגדרנו **<u>רציפות בנקודה</u>**: ע"י מספר תכונות שקולות, אחת מהן היא כי הגבול (הדו-צדדי) קיים, ושווה לערך הפונקציה בנקודה.
- הגדרנו **<u>רציפות מימין בנקודה</u>**, ע"י מספר תכונות שקולות, אחת מהן היא כי הגבול החד-צדדי מימין קיים, ושווה לערך הפונקציה בנקודה.
- הגדרנו **<u>רציפות משמאל בנקודה</u>**, ע"י מספר תכונות שקולות, אחת מהן היא כי הגבול החד-צדדי משמאל קיים, ושווה לערך הפונקציה בנקודה.
- פונקציה היא רציפה בנקודה אמ"מ היא רציפה שם גם מימין וגם משמאל.
- במילים אחרות: פונקציה היא רציפה בנקודה אמ"מ הגבולות מימין ומשמאל קיימים ושווים לערך הפונקציה בנקודה.
- *ניתן לנמק בזריזות כי פונקציה היא רציפה בנקודה אם היא מורכבת מחיבור,חיסור,כפל,חילוק,והרכבה של פונקציות רציפות (בחילוק צריך להיזהר שלא מחלקים באפס). בנוסף שורש של פונקציה רציפה <u>וחיובית</u> היא רציפה.*

<u>תזכורת: רציפות בקטע</u>

רוצים להשתמש בהגדרה של רציפות נקודתית כדי להגדיר מה הכוונה שפונקציה היא רציפה בקטע. יש להבחין בין המקרה שבו הקטע פתוח (לא מכיל נקודות קצה) לבין המקרה שבו הקטע סגור (כן מכיל נקודות קצה).

- **<u>עבור קטע פתוח</u>** (a,b), כלומר קטע ש**<u>לא</u>** מכיל נקודות קצה, מגדירים **<u>רציפות בקטע</u>** פשוט להיות רציפות בכל אחת מהנקודות של הקטע, כלומר רציפות בנקודה $x \in R$ עבור כל $a < x < b$.

  דוגמאות לקטעים פתוחים מלבד (a,b): גם $(-\infty,\infty) = R \quad (-\infty,b), \quad (a,\infty)$.

- **<u>עבור קטע סגור</u>** $[a,b]$, כלומר קטע ש**<u>כן</u>** מכיל נקודות קצה, מגדירים **<u>רציפות בקטע</u>** כך:
  - ***ראשית***, דורשים רציפות נקודתית בכל הנקודות הפנימיות של הקטע, כלומר הנקודות x המקיימות $a < x < b$. (כלומר אותו דבר שדרשנו כמו בקטע פתוח)
  - ***בנוסף***, בקצה השמאלי של הקטע, כלומר ב-a, דורשים רציפות מימין, ובקצה הימני של הקטע, כלומר ב-b , דורשים רציפות משמאל.

- *קטע מעורב: אם לקטע יש רק נקודת קצה אחת עושים את הדבר הברור, כלומר: דורשים רציפות חד-צדדית רק בנקודת הקצה האחת שיש לו. כלומר:*
  - *רציפות בקטע $[a,b)$ אומרת, חוץ מרציפות בכל הנקודות הפנימיות, גם רציפות מימין ב-a, כנ"ל עבור הקטע $[a,\infty)$.*
  - *רציפות בקטע $(a,b]$ אומרת, חוץ מרציפות בכל הנקודות הפנימיות, גם רציפות משמאל ב-b, כנ"ל עבור הקטע $(-\infty,b]$.*

<u>דוגמה</u>

נחקור את רציפות הפונקציה
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \frac{1}{2} & x > 0 \end{cases}$$
בקטע $[-1,8]$.

איפה יש לבדוק רציפות?

- בנקודה $x = -1$ (רציפות מימין)
- בנקודה $x = 0$ (רציפות לפי ההגדרה)
- בנקודה $x = 8$ (רציפות משמאל)
- באינטרוול $(-1,0)$
- באינטרוול $(0,8)$