סדרות וטורים של פונקציות

אינטואיציה

מתי ניתן להחליף סדר גבולות ?

נתבונן בביטוי :

$$\boxed{\lim_{\substack{n\to\infty\\x\to 0}} \frac{1}{n\cdot|x|}}$$

נראה האם ניתן להחליף את סדר הגבולות :

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\x\to 0}} \frac{1}{n\cdot|x|} = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0}\frac{1}{n\cdot|x|} = \lim_{n\to\infty}\infty = \infty$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\x\to 0}} \frac{1}{n\cdot|x|} = \lim_{x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot|x|} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$0 \neq \infty$, לכן, כאן לא ניתן להחליף את סדר הגבולות.

■

הגדרה

עבור פונקציות f_n, f כאשר $n\in\mathbb{N}$, נאמר ש : $\boldsymbol{f_n \xrightarrow{n\to\infty} f}$ **בתחום** $\boldsymbol{X}\subseteq\mathbb{R}$, אם לכל $x\in X$ מתקיים :

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

דורשים באופן מובלע שלכל $x\in X$: $dom(f_n), dom(f) \ni x$ כאשר $n\in\mathbb{N}$.

דוגמה 1

$$\boxed{f_n(x) := \frac{1}{n\cdot x} \quad ; \quad x\in(0,1)}$$

לכל $x\in(0,1)$:

$$\frac{1}{n\cdot x} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן : $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ בקטע $(0,1)$.

לכן, לכל $x \in (0,1)$: לכל $0 < \varepsilon$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים :

$$\left|\frac{1}{n \cdot x} - 0\right| < \varepsilon$$

יהי $0 < \varepsilon$.

$$\left|\frac{1}{n \cdot x} - 0\right| \overset{0<x}{=} \frac{1}{n \cdot x} \overset{\text{דרוש}}{=}< \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\varepsilon \cdot x} < n$$

לכן, מספיק, למשל :

$$N \coloneqq \left[\frac{1}{\varepsilon \cdot x}\right] + 1$$

נשים לב ש – N זה **תלוי ב -** $\boldsymbol{x}$.

■

דוגמה 2

$$\boxed{f_n(x) \coloneqq \frac{1}{n + x} \quad ; \quad x \in (0,1)}$$

כאן : $0 \xrightarrow{n \to \infty} f_n(x)$ בקטע $(0,1)$.

לכן, לכל $x \in (0,1)$: לכל $0 < \varepsilon$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים :

$$\left|\frac{1}{n + x} - 0\right| < \varepsilon$$

יהי $0 < \varepsilon$.

לכל $n \in \mathbb{N}$, לכל $x \in (0,1)$.

$$\frac{1}{n + x} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

לכן, קיים $N \in \mathbb{N}$ (למשל, $N \coloneqq [1/\varepsilon] + 1$) כך שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

לכל $n \in \mathbb{N} \geq N$, לכל $x \in (0,1)$:

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

נשים לב ש - N זה **אינו תלוי ב – x**.

$\blacksquare$

הגדרה

עבור פונקציות f_n, f כאשר $n \in \mathbb{N}$, נאמר ש: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ **במידה שווה בתחום** $X \subseteq \mathbb{R}$, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

דוגמה

עפ"י הדוגמה השנייה:

$$\frac{1}{n+x} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

במידה שווה בקטע $(0,1)$, ולמעשה, בכל $\mathbb{R}^+$.

עפ"י הדוגמה הראשונה:

$$\frac{1}{n \cdot x} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

אך לא במידה שווה בקטע $(0,1)$:

למשל, עבור $\varepsilon := 1/2$: לכל $n \geq 1$, ניקח $x_n := 1/n \in (0,1)$. אז:

$$|f_n(x_n) - 0| = f_n(x_n) = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{n}} = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$$

$\blacksquare$

הערה

יהיו f_n, f פונקציות המוגדרות בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$.

התכונות הבאות שקולות:

1. $f \xrightarrow{n\to\infty} f_n$ במידה שווה בתחום X.
2. מתקיים:

$$\varepsilon_n \coloneqq \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

3. לכל סדרה $X \ni x_n$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

הוכחה

$\boxed{2 \Leftarrow 1}$

נניח ש: $f \xrightarrow{n\to\infty} f_n$ במידה שווה בתחום X.

יהי $0 < \varepsilon$.

עפ"י ההנחה, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_n \coloneqq \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

לכן:

$$\varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\square$

$\boxed{3 \Leftarrow 2}$

נניח שמתקיים:

$$\varepsilon_n \coloneqq \sup_{x\in X}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

תהי סדרה $x_n \in X$.

אזי:

$$0 \le |f_n(x_n) - f(x_n)| \le \varepsilon_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ועפ"י משפט הסנדוויץ':

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\square$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$

נניח שלכל סדרה $x_n \in X$:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

נניח בשלילה כי: $f_n \nrightarrow f$ במידה שווה בתחום X.

לכן, קיים $\varepsilon > 0$, כך שלכל $N \in \mathbb{N}$, קיים $N \le n \in \mathbb{N}$ עבורו קיים $x_n \in X$ כך ש:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon$$

לכן, קיימים אינסוף ערכי $n \in \mathbb{N}$ עבורם קיים x_n כנ"ל.

עבור שאר ערכי $n \in \mathbb{N}$, ניקח $x_n \in X$ שרירותי.

אזי, הסדרה $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ מכילה תת סדרה שאיבריה גדולים או שווים מ - ε.

לכן:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \nrightarrow 0$$

$\blacksquare$

דוגמה

המחשה של אפיון מספר (2).

$$\boxed{f_n(x) \coloneqq x^n \cdot (1 - x^n) \quad ; \quad x \in [0,1]}$$

לכל $x \in [0,1]$ מתקיים:

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

f_n, f רציפות, לכן:

$$\varepsilon_n \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} \left| \overbrace{f_n(x)}^{\geq 0} - \overbrace{f(x)}^{=0} \right| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x)$$

נחשב:

$$\max_{x\in[0,1]} f_n(x)$$

נציב:

$$t \coloneqq x^n$$

לכן:

$$f_n(x) = x^n \cdot (1 - x^n) = t \cdot (1 - t) = g(t)$$

$$\Downarrow$$

$$g'(t) = 1 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \wedge g''(t) = -2 < 0$$

לכן:

$$\max_{x\in[0,1]} t \cdot (1 - t) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

לכן:

$$x \coloneqq \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon_n = |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \nrightarrow 0$$

■

הקריטריון של קושי

יהיו f_n פונקציות המוגדרות בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$.

התכונות הבאות שקולות:

1. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ במידה שווה בתחום X עבור פונקציה f המוגדרת בתחום X.
2. לכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N\le n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x\in X$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

הוכחה

$\boxed{2 \Leftarrow 1}$

נניח ש: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ במידה שווה בתחום X עבור פונקציה f המוגדרת בתחום X.

יהי $0<\varepsilon$.

עפ"י ההנחה, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N\le n\in\mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x\in X$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$|f_m(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|f_n(x)-f_m(x)|=|f_n(x)-f(x)+f(x)-f_m(x)|$$

$$|f_n(x)-f_m(x)|\le|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|$$

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

כדרוש.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

נניח שלכל $0<\varepsilon$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $N\le n,m\in\mathbb{N}$ מתקיים: לכל $x\in X$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

יהי $x\in X$ קבוע.

עפ"י ההנחה, הסדרה $f_n(x)$ מקיימת את קריטריון קושי לסדרות, לכן קיים מספר ממשי, נסמנו $f(x)$, כך ש: $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$.

אזי, לכל $x\in X$ מתקיים: $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, כלומר: $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$.

נראה שההתכנסות היא במידה שווה.

יהי $0 < \varepsilon$.

עפ״י ההנחה, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $N \le n \in \mathbb{N}$, לכל $x \in X$ מתקיים:

$$\left| f_n(x) - \overbrace{f_m(x)}^{\xrightarrow{m\to\infty} f(x)} \right| < \varepsilon$$

לכן, לכל $x \in X$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

הגדרה

הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מתכנס לפונקציה $s(x)$ בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$, אם עבור הפונקציות:

$$s_n(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

מתקיים: לכל $x \in X$ מתקיים: $s_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} s(x)$.

בפרט, מניחים שהפונקציות $f_n(x), s(x)$ מוגדרות לכל $x \in X$.

הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מתכנס במידה שווה לפונקציה $s(x)$ בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$, אם (בסימונים הנ״ל):

$$s_n \xrightarrow{n\to\infty} s$$

במידה שווה בתחום X.

דוגמה

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad ; \quad x \in [0,1)}$$

מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x}{1-x} = s(x)$$

לכן:

$$s_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} s(x)$$

אך לא במידה שווה:

עבור $\varepsilon := 1/2$, לכל $n \in \mathbb{N}$, ניקח: $x_n := \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$, ואז:

$$|s(x) - s_n(x_n)| = \frac{x_n^{n+1}}{1-x} \overset{0\le x<1}{\geq} x_n^{n+1} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0$$

■