# <u>פונקציות ב - $\mathbb{R}^n$</u>

**משפט**

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f : E \to \mathbb{R}^m$ פונקציה רציפה.

אזי, לכל קבוצה פתוחה $H \subseteq \mathbb{R}^m$, הקבוצה:

$$f^{-1}(H) \quad := \quad \{x \in E \mid f(x) \in H\}$$

פתוחה ביחס ל - $E$.

**הוכחה**

נוכיח כי קיימת קבוצה פתוחה $G \subseteq \mathbb{R}^n$ כך ש:

$$f^{-1}(H) \quad = \quad E \cap G$$

נגדיר:

$$G \quad := \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in H\}$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} f^{-1}(H) \quad &= \quad E \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in H\} \\ &= \quad E \cap G \end{aligned}$$

נוכיח כי $G$ פתוחה.

אם $G = \emptyset$, אז $G$ פתוחה.

אם $G \neq \emptyset$, יהי $x \in G$.

עפ"י הגדרת $G$:

$$f(x) \quad \in \quad H$$

$H$ פתוחה, לכן קיים $0 < r$ כך ש:

$$B(f(x), r) \quad \subseteq \quad H$$

$f$ רציפה, לכן קיים $0 < \delta$ כך ש:

$$f(B(x,\delta)\cap E) \subseteq B(f(x),r) \subseteq H$$

עפ"י הגדרת $G$:

$$B(x,\delta)\cap E \subseteq G$$

לכן, $G$ פתוחה.

לכן:

$$f^{-1}(H) := \{x\in E \mid f(x)\in H\}$$

פתוחה ביחס ל - $E$.

■

**משפט**

תהי $\mathcal{K}\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית.

תהי $f:\mathcal{K}\to\mathbb{R}^m$ רציפה.

אזי, $f(\mathcal{K})$ קומפקטית.

**הוכחה**

יהי $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של $f(\mathcal{K})$.

עפ"י משפט, לכל $\alpha\in I$, קיימת קבוצה פתוחה $G_\alpha$ כך ש:

$$f^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) = G_\alpha\cap\mathcal{K}$$

עפ"י הגדרת הקבוצות $G_\alpha$:

$$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$$

כיסוי פתוח של $\mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ קומפקטית, לכן קיים לכיסוי פתוח זה תת-כיסוי סופי:

$$\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^{s}$$

עפ"י הגדרת הקבוצות $G_\alpha$:

$$\left\{\mathcal{U}_{\alpha_i}\right\}_{i=1}^{s}$$

תת-כיסוי סופי של $f(\mathcal{K})$.

לכן, $f(\mathcal{K})$ קומפקטית.

■

**הגדרה**

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}^m$.

$f$ **רציפה במידה שווה** על $E$ אם לכל $0 < \varepsilon$, קיים $0 < \delta$, כך שלכל $x', x'' \in E$ כך ש:

$$\|x' - x''\| \quad < \quad \delta$$

מתקיים:

$$\|f(x') - f(x'')\| \quad < \quad \varepsilon$$

**משפט (קנטור)**

תהי $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית.

תהי $f: \mathcal{K} \to \mathbb{R}^m$ רציפה.

אזי, $f$ רציפה במידה שווה על $\mathcal{K}$.

**הוכחה**

יהי $0 < \varepsilon$.

$f$ רציפה, לכן לכל $a \in \mathcal{K}$, קיים $0 < r_a$ כך שלכל $x \in B(a, r_a) \cap \mathcal{K}$, מתקיים:

$$\|f(x) - f(a)\| \quad < \quad \frac{\varepsilon}{2}$$

לכן, לכל $x', x'' \in B(a, r_a) \cap \mathcal{K}$, מתקיים:

$$\|f(x') - f(x'')\| \quad < \quad \varepsilon$$

עפ״י הגדרת $0 < r_a$:

$$\left\{B\left(a,\frac{r_a}{2}\right)\right\}_{a\in\mathcal{K}}$$

כיסוי פתוח של $\mathcal{K}$.

$\mathcal{K}$ קומפקטית, לכן לכיסוי פתוח זה קיים תת-כיסוי סופי:

$$\left\{B\left(a_i,\frac{r_{a_i}}{2}\right)\right\}_{i=1}^{s}$$

נגדיר:

$$\delta \quad := \quad \min_{1\le i\le s} r_{a_i}$$

יהיו $x', x'' \in \mathcal{K}$, כך ש:

$$\|x'-x''\| \quad < \quad \delta$$

קיים $1\le i\le s$ כך ש:

$$x' \quad \in \quad B\left(a_i,\frac{r_{a_i}}{2}\right)$$

לכן:

$$\begin{aligned}
\|x''-a_i\| \quad &\le \quad \|x'-x''\|+\|x'-a_i\| \\
&< \quad \delta+\frac{r_{a_i}}{2} \\
&< \quad 2\cdot\frac{r_{a_i}}{2} \\
&< \quad r_{a_i}
\end{aligned}$$

לכן:

$$x'' \quad \in \quad B\left(a_i,r_{a_i}\right)$$

מתקיים:

$$x' \quad \in \quad B\left(a_i,r_{a_i}\right)$$

לכן:

$$\|f(x')-f(x'')\| \quad < \quad \varepsilon$$

לכן, $f$ רציפה במידה שווה על $\mathcal{K}$.

■

**הגדרה**

פונקציה רציפה:

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

נקראת **קו רציף** (או **עקומה** או **מסילה**) ב - $\mathbb{R}^n$.

**דוגמה**

המעגל:

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

הינו קו רציף.

ניתן להגדיר את המעגל ע"י פונקציה רציפה $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) \quad = \quad (\cos\ t\,, \sin t)$$

■

**הגדרה**

קבוצה $E \subseteq \mathbb{R}^n$ נקראת **קשירה (מסילתית)** אם ניתן לחבר כל שתי נקודות בקבוצה ע"י קו רציף שנמצא כולו בתוך הקבוצה.

פורמלית, אם לכל $A, B \in E$, קיים קו רציף $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ כך ש:

$$\gamma(a) \quad = \quad A$$

$$\gamma(b) \quad = \quad B$$

ולכל $t \in [a, b]$:

$$\gamma(t) \quad \in \quad E$$

**הגדרה**

קבוצה פתוחה וקשירה נקראת **תחום**.

**משפט (ערך הביניים)**

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קשירה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$ רציפה.

יהיו $A, B \in E$.

אזי, לכל $\alpha \in [f(A), f(B)]$ (או $[f(B), f(A)]$), קיימת נקודה $C \in E$ כך ש:

$$f(C) = \alpha$$

**הוכחה**

$E$ קשירה, לכן קיימת עקומה $\gamma: [a,b] \to E$, כך ש:

$$\gamma(a) = A$$
$$\gamma(b) = B$$

ולכל $t \in [a,b]$:

$$\gamma(t) \in E$$

נגדיר פונקציה $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$\varphi(t) \coloneqq f\big(\gamma(t)\big)$$

$\varphi$ רציפה ב - $[a,b]$, כהרכבה של פונקציות רציפות.

יהי $\alpha \in [f(A), f(B)]$.

עפ"י הגדרת $\varphi$:

$$\varphi(a) = f(A)$$
$$\varphi(b) = f(B)$$

לכן:

$$\alpha \in [\varphi(a), \varphi(b)]$$

עפ"י משפט ערך הביניים, קיים $t_0 \in [a,b]$ כך ש:

$$\varphi(t_0) = \alpha$$

נגדיר:

$$C := \gamma(t_0)$$

לכן:

$$\begin{aligned} f(C) &= f\left(\gamma(t_0)\right) \\ &= \varphi(t_0) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

■

# **<u>דיפרנציאביליות</u>**

**הגדרה**

פונקציה $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מהצורה:

$$A(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i$$

כאשר לכל $1 \leq i \leq n$:

$$a_i \quad \in \quad \mathbb{R}$$

נקראת **פונקציה לינארית**.

**הגדרה**

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

$f$ **דיפרנציאבילית** ב – $x_0$ אם קיימת פונקציה לינארית $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך ש:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

הפונקציה $A$ נקראת **הנגזרת** של $f$ ב - $x_0$, ומסומנת $f'(x_0)$.

הפונקציה $A$ נקראת גם **הדיפרנציאל** של $f$ ב - $x_0$, ומסומנת $df(x_0)$.

**הערה**

$f$ דיפרנציאבילית ב - $x_0$ אם קיימת פונקציה לינארית $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ כך ש:

$$f(x_0 + h) \quad = \quad f(x_0) + A(h) + r(h)$$

כאשר:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} \quad = \quad 0$$

■

**הגדרה**

**היפר מישור** ב - $\mathbb{R}^n$ הוא קבוצת הנקודות $x \in \mathbb{R}^n$, המקיימות:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \quad = \quad c$$

כאשר לכל $1 \leq i \leq n$:

$$a_i \quad \in \quad \mathbb{R}$$

וכן:

$$c \quad \in \quad \mathbb{R}$$

**הגדרה**

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

תהי $f: E \to \mathbb{R}$.

**גרף הפונקציה** $f$ הוא קבוצת הנקודות:

$$\{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n) \mid (x_1, \cdots, x_n) \in E\}$$

■