<u>עיקרי הדברים מתרגילי כיתה 6 ו 7 – טורי טיילור</u>

מתרגל: אדם צ'פמן

טור טיילור:

בהינתן פונקצייה $f(x)$ הגזירה אינסוף פעמים בנקודה $x=a$, ניתן לפתח טור טיילור של הפונקצייה סביב נקודה זו

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ldots$$.

ברדיוס מסויים R סביב a [שתכף נסביר איך מחשבים אותו] ישנו שוויון מוחלט בין $f(x)$ לטור טיילור שלה, כלומר $g(x)=f(x)$ לכל x המקיים $|x-a|<R$.

חישוב רדיוס ההתכנסות:

נסמן $c_n=\frac{f(a)}{n!}$. אם קיים $L=\lim_{n\to\infty}|\frac{c_n}{c_{n+1}}|$ (במובן הרחב, כלומר $L=\infty$ זה גם בסדר) אזי לכל x המקיים $|x-a|<L$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}(x-a)|<1$ ולכן לפי דלמבר הטור $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ מתכנס (במובן הצר, כלומר לערך סופי כלשהו). מאידך, לכל x המקיים $|x-a|>L$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}|\frac{c_{n+1}}{c_n}(x-a)|>1$ ולכן לפי דלמבר הטור

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ איננו מתכנס (במובן הצר, כלומר ייתכן שהוא מתכנס לאינסוף, אך זה לא מעניין אותנו).

במקרה כזה, אם כן, מתקיים ש $R = L$ הוא רדיוס ההתכנסות.

הבעיה היא שלא תמיד קיים $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$.

אם למשל $c_n = \frac{1}{2^n}$ לכל n זוגי, ולכל n אי-זוגי $c_n = 0$ אז לא קיים $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{c_n}{c_{n+1}}|$.

מה שעושים במקרה זה הוא להגדיר $d_n = c_{2n}$ ולהביט בטור $\sum_{n=0}^{\infty} d_n ((x-a)^2)^n$. טור זה

שווה לטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ (בגלל שכל החזקות האי-זוגיות מתאפסות). כעת מחשבים את

רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} d_n ((x-a)^2)^n$ כפי שחישבנו קודם, דהיינו $L = \lim_{n\to\infty} |\frac{d_n}{d_{n+1}}|$

הוא רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} d_n ((x-a)^2)^n$, ואז $R = \sqrt{L}$ הוא רדיוס ההתכנסות של

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$.

דרך נוספת היא פשוט לבדוק לפי דלמבר, להביט בטור שמתקבל אחרי שמתעלמים מהאפסים (ייתכן ונקבל למשל רק חזקות זוגיות) נסמן את איברי הטור (כולל את הרכיב של ה

$((x-a)^n$ ב a_n ולבדוק מתי מתקיים $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|<1$ $\lim_{n\to\infty}$. הפיתרון של זה ייתן את רדיוס ההתכנסות.

דוגמאות חשובות:

- טור טיילור של $f(x)=e^x$ סביב 0.

$f^{(n)}(x)=e^x$, ולכן $f^{(n)}(0)=1$ לכל n. מקבלים שטור טיילור הוא $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. רדיוס

ההתכנסות הוא $\infty = \lim(n+1) = |\frac{(n+1)!}{n!}| \lim = |\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}| \lim$.

- טור טיילור של $f(x)=\frac{1}{1-x}$ בסביבת 0.

$f'(x)=(1-x)^{-2}$, $f''(x)=2(1-x)^{-3}$, ובאופן כללי

$f^{(n)}(x)=n!(1-x)^{-(n+1)}$. לכן טור טיילור הוא $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$.

רדיוס ההתכנסות הוא $1=\lim(\frac{1}{1})$.

- טור טיילור של $f(x)=\cos(x)$ סביב 0.

$f^{(n)}(x)=\cos(x)$ לכל n שמתחלק ב 4 בלי שארית, $f^{(n)}(x)=-\sin(x)$ לכל n שמתחלק ב 4 עם שארית 1, $f^{(n)}(x)=-\cos(x)$ לכל n שמתחלק ב 4 עם שארית 2 ו $f^{(n)}(x)=\sin(x)$ לכל n שמתחלק ב 4 עם שארית 3.

לכן מקבלים $f^{(n)}(0)=(-1)^{\frac{n}{2}}$ לכל n זוגי ו $f^{(n)}(0)=0$ לכל n אי-זוגי.

לכן מקבלים רק חזקות זוגיות, משמע טור טיילור הוא $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$. נסמן

$d_m=\frac{(-1)^m}{m!}$, ומקבלים ש $L=\lim_{n\to\infty}|\frac{d_n}{d_{n+1}}|=\infty$, ולכן $R=\sqrt{L}=\infty$ הוא רדיוס ההתכנסות.

גזירה או אינטגרציה:

טור טיילור של $f'(x)$ הוא הנגזרת של הטור של $f(x)$, לכן אם רוצים לחשב אחד ונתון את השני אז אפשר להגיע אליו דרך גזירה או ינטגרציה (לא מסויימת).

דוגמאות:

- $f(x)=\sin(x)$ סביב 0.

ידוע (כפי שראינו קודם) כי $\cos(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}$. כעת, נגזור את שני הצדדים ונקבל כי [אנחנו מפרידים את הקבוע מהשאר כי הנגזרת שלו היא 0]

$$-\sin(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}(2m)x^{2m-1}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)!}x^{2m-1}$$

נכפיל ב -1 ונקבל $\sin(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}$.

רדיוס ההתכנסות גם פה הוא ∞.

- $g(x)=\arctan(x)$ סביב 0.

הנגזרת היא $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

אם מציבים $t=-x^2$ המקבלים $f(x)=\frac{1}{1-t}$ ואז ידוע כי לכל $|t|<1$ מתקיים

$$f(x)=\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

אם $|t|<1$ אזי $|-x^2|<1$ ולכן $|x^2|<1$, משמע, $-1<x<1$, כלומר רדיוס ההתכנסות הוא $R=1$.

כדי לקבל את הטור טיילור של $g(x)$ צריך לעשות אינטגרציה לא מסויימת ולהוסיף את

הקבוע $g(0)$ ומקבלים ש $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}x^{2n+1}$.