

תרגיל 9

1. תהי (G, τ) חבורה טופולוגית, הוכיחו או הפריכו:

- (א) אם $H \leq G$ היא תת חבורה פתוחה אז היא גם סגורה
 (ב) אם $H \leq G$ היא תת חבורה סגורה אז היא גם פתוחה
 (ג) רכיב הקשירות של $e \in G$ הוא תת חבורה סגורה.

2. נניח ש- $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ מרחבים טופולוגיים ונסתכל על $X := \prod_{i \in I} X_i$ עם טופולוגיית המכפלה τ_Π . נניח ש- (Y, σ) הוא עוד מרחב טופולוגי ו- $f : Y \rightarrow X$ הוכיחו ש- f רציפה אם ורק אם $p_i \circ f$ רציפה לכל הטלה $p_i : X \rightarrow X_i$.

3. יהיו $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ מרחבים דיסקרטיים לא ריקים. הראו ש- $X := \prod_{i \in I} X_i$ הוא מרחב דיסקרטי אם ורק אם $|X_i| = 1$ פרט למספר סופי של מקומות.

4. יהיו $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ מרחבים טופולוגיים ו- $A_i \subseteq X_i$ לכל $i \in I$. הוכיחו ש-

$$cl\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \prod cl(A_i)$$

5. עבור כל אחת מהתכונות הבאות, הראו שאם $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ מקיימות אותה, כך גם המכפלה $X := \prod_{i \in I} X_i$:

- (א) קשירות
 (ב) קשירות מסילתית
 (ג) T_2

6. הראו שמכפלה בת מניה של מרחבים ספרבילים היא ספרבילית. כלומר, אם $(X_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ספרבילים, אז גם $X := \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ ספרבילית עם טופולוגיית המכפלה.

7. בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצאו מרחבים טופולוגיים $(X, \tau), (Y, \sigma)$ ו- $f : X \rightarrow Y$ כך ש:

- (א) f רציפה, חח"ע, על אך לא פתוחה ולא סגורה
 (ב) f רציפה, על, פתוחה אך לא סגורה
 (ג) f רציפה, על, סגורה אבל לא פתוחה
 (ד) חח"ע, על, פתוחה, סגורה אבל לא רציפה.

8. הראו שמכפלה בת מניה של מרחבים מטריזביליים היא מטריזבילית

9. אתגר: הראו שמכפלה מעוצמת הרצף של מרחבים ספרבילים היא ספרבילית.

10. השלימו את הטבלה הבאה

מכפלה כללית	מכפלה מעוצמת הרצף	מכפלה בת מניה	מכפלה סופית	תכונה
				דיסקרטיות
				קשירות
				קשירות מסילתית
				ספרביליות
				B_2
				B_1
				T_2
				מימד אפס
				מטריזביליות