

חשבון אינפיניטסימלי 3 (88-230)

מועד א', תשע"ה

מרצים: פרופ' שמואל קנטורוביץ', פרופ' ראובן כהן, ד"ר מנחם שלוסברג

משך המבחן: 2.5 שעות

ניקוד: 20 נקודות לכל שאלה

אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון

ענה על שאלה אחת מבין השאלות 1,2

1. תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה לפי x לכל y קבוע ונניח שקיים $M > 0$ כך

שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f_y(x, y)$ קיימת וכן $|f_y(x, y)| \leq M$. הוכח ש f רציפה.

$$2. \text{ תהי } f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת באופן הבא}$$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + \|x\|^2} - 1}{\|x\|^2} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

(א) מצא $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

(ב) האם f דיפרנציאבילית ב-0?

3. (א) יהי $a > 0$. מצא את המקסימום של הפונקציה $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$ בקבוצה

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = a, \quad \forall i x_i \geq 0 \right\}$$

(ב) הסק את אי שוויון הממוצעים:

$$\text{אם } x_1, \dots, x_n > 0 \text{ אז } \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} > \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

4. (בחר (א) או (ב))

(א) הוכח שהמשוואה $u^3 + 2u + e^{u-x-y^2} = \cos(x^2 + 4xy - u)$ מגדירה פונקציה

$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ממחלקה C^1 בסביבה של $(0,0)$ שמתאפסת בראשית.

חשב את $u_x(0,0), u_y(0,0)$.

(ב) הראה שמערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x - y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 - 4y - 2z^2 = 0 \end{cases}$$

בסביבת הנקודה $p = (4,2,2)$ מגדירה פונקציה $(x,y) = \varphi(z)$ בצורה

סתומה. מצא את $\varphi'(2)$.

5. מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה וסווג אותן:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$$

6. חשב את האינטגרל המשולש $\iiint_{\bar{D}} z dx dy dz$ עבור התחום הסגור \bar{D} ב-

\mathbb{R}^3 , כאשר \bar{D} חסום ע"י החרוט $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ והמישורים $z=0$ ו-

$$z=c \quad (a,b,c > 0)$$

בהצלחה!