פתרון מועד א' בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2

קורס מס' 83114 תשע"ח, סמסטר ב', מועד א'

שאלה 1: יהא הטור $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}$.

א. קבעו היכן הטור מתכנס בהחלט / בתנאי / במידה שווה (10 נק'),

ב. תארו את $f(x)$ בצורה מפורשת (15 נק').

פתרון:

א. נחשב את רדיוס ההתכנסות עפ"י נוסחת קושי: $\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}}=1$ כלומר $R=1$. בשני הקצוות מתקבל טור לייבניץ המתכנס בתנאי, ב-$(-1,1)$ הטור מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע הסגור $[-1,1]$ כולו (משפט).

ב. כיוון שהטור מתכנס במ"ש בקטע $[-1,1]$, לכל $-1\le x\le 1$ ניתן להחליף את סדר הסכימה והאינטגרציה:

$$\begin{aligned}f(x)&=x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\int_0^x t^{2n}dt\\&=x\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}t^{2n}dt=x\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=x\arctan(x)\end{aligned}.$$

שאלה 2. תהא $f(x,y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה a ווקטור יחידה $\hat{h}=(h_1,h_2)$ כך ש: $\frac{\partial f}{\partial \hat{h}}(a)=\frac{\partial f}{\partial \hat{h}^{\perp}}(a)=k$.

א. בטאו את ∇f_a באמצעות הקבועים h_1,h_2,k (15 נק').

ב. חשבו את $\|\nabla f_a\|$ והציעו פרשנות לתוצאה שקיבלתם (10 נק').

פתרון:

א. כיוון ש: $\hat{h}=(h_1,h_2)$ מנורמל, עד כדי סימן: $\hat{h}^{\perp}=(-h_2,h_1)$. נתון שהפונקציה דיפרנציאבילית לכן:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{h}}(a)=\nabla f_a\bullet(h_1,h_2)=h_1\cdot f_x(a)+h_2\cdot f_y(a)=k$$
$$\frac{\partial f}{\partial \hat{h}^{\perp}}(a)=\nabla f_a\bullet(-h_2,h_1)=-h_2\cdot f_x(a)+h_1\cdot f_y(a)=k$$

אם $h_1=0$ אז: $h_2=\pm 1$, $f_y(a)=-f_x(a)=\pm k$ כלומר: $\nabla f_a=\pm k(1,-1)$. אם: $h_2=0$ אז: $\nabla f_a=\pm k(1,1)$.

אחרת נרשום:

$$f_x(a)=\frac{k-h_2f_y(a)}{h_1}=\frac{h_1f_y(a)-k}{h_2}\ \Rightarrow\ h_2k-h_2^2f_y(a)=h_1^2f_y(a)-h_1k$$
$$\Rightarrow\ f_y(a)=k(h_2-h_1),\ f_x(a)=k\left(\frac{1-h_2^2+h_1h_2}{h_1}\right)=k\left(\frac{h_1^2+h_1h_2}{h_1}\right)=k(h_1+h_2).$$

בסה"כ: $\nabla f_a=k(h_1+h_2,h_2-h_1)$.

ב. עפ"י מה שקיבלנו בסעיף א': $\|\nabla f_a\|=k\sqrt{2h_1^2+2h_2^2}=\sqrt{2}k$.

המשמעות עפ"י משפט פיתגורס היא שהגרדיאנט מתקבל באמצע בין $\hat{h}$ ל- $\hat{h}^{\perp}$.

שאלה 3. עבור המשוואה: $y^2+2xy=2x-4x^2$:

א. הראו שהיא מגדירה פונקציה $y=f(x)$ מקומית בסביבה של כל נקודה בה $y\neq -x$ (5 נק').

ב. מצאו וסווגו את נקודות הקיצון המקומי של הפונקציה $y=f(x)$ מסעיף א' (20 נק').

פתרון:

א. נתאר את המשוואה ע"י: $F(x,y)=y^2+2xy-2x+4x^2=0$ ונקבל עפ"י משפט הפונקציות הסתומות שבסביבה של נקודות בהן: $F_y=2y+2x\neq 0$ כלומר: $y\neq -x$ מוגדר קשר של פונקציה: $y=f(x)$.

ב. עפ"י המשפט הנ"ל $y=f(x)$ גזירה ולכן עפ"י משפט פרמה תנאי הכרחי לכך ש x_0 תהיה נקודת קיצון מקומי הוא: $f'(x_0)=0$. שוב עפ"י המשפט:

$$y'=f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}=-\frac{2y-2+8x}{2y+2x}=\frac{1-y-4x}{x+y}=0 \Leftrightarrow y=1-4x$$

יחד עם המשוואה המקורית נקבל:

$$(1-4x)^2+2x(1-4x)-2x+4x^2=0 \Rightarrow 12x^2-8x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{8\pm 4}{24}=\frac{1}{2},\frac{1}{6}$$

קיבלנו שתי נקודות חשודות לקיצון מקומי: $\left(\frac{1}{2},-1\right),\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$. נסווג אותן עפ"י הנגזרת השנייה:

$$y''=\left(\frac{1-y-4x}{x+y}\right)'=\frac{(-y'-4)(x+y)-(1-y-4x)(1+y')}{(x+y)^2}$$

בנקודות החשודות: $y''=-4\frac{(x+y)}{(x+y)^2}$ מכאן ש: $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ נק' מינימום מקומי ו $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$ מקסימום מקומי.

שאלה 4. חרוט כללי בעל חתך מעגלי נתון ע"י המשוואה: $z=\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}$.

א. הראו כיצד חרוט זה ניתן לתיאור בקורדינטות כדוריות ע"י $\varphi=k$ ובטאו את הקבוע k ע"י a (5 נק').

ב. בטאו את שטח הפנים של החרוט אם הוא חסום ע"י המישור $z=b$ באמצעות הקבועים a,b (10 נק').

ג. בטאו את הנפח הכלוא ע"י החרוט והמישור $z=b$ באמצעות הקבועים a,b (10 נק').

פתרון:

א. בקורדינטות כדוריות: $r\cos\varphi=\frac{1}{a}r\sin\varphi \Rightarrow a=\tan(\varphi) \Rightarrow \varphi=\arctan(a)=k$.

ב. זהו אינטגרל משטחי מסוג ראשון. ניעזר בהטלה על מישור x,y. כיוון ש: $r=az$ ההיטל הוא עיגול ברדיוס ab. גורם ההטלה מחושב ע"י המשוואה שמגדירה את החרוט: $F(x,y,z)=x^2+y^2-a^2z^2=0$ כלומר:

$$\frac{|\nabla F|}{|F_z|}=\frac{\left|\left(2x,2y,-2a^2z\right)\right|}{2a^2z}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+a^4z^2}}{a^2z}==\frac{\sqrt{a^2z^2+a^4z^2}}{a^2z}=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

מכאן ש: $|S|=\iint_S dS=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\iint_D dD=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\pi(ab)^2=\sqrt{1+a^2}\pi ab^2$.

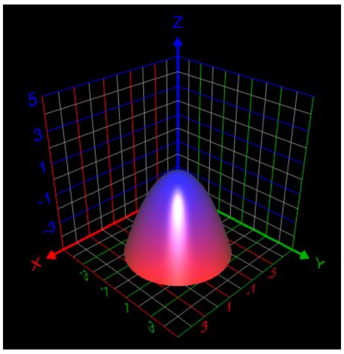
ג. הסימטריה שנוצרת היא גלילית. הנפח הוא: $\frac{\pi a^2 b^3}{3}= \left|V\right| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^b dz \int_0^{az} r dr = 2\pi \int_0^b \frac{(az)^2}{2} dz = \pi a^2 \cdot \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^b$

שאלה 5.

חשבו את מסת הגוף החסום ע"י הפרבולואיד $z=\frac{1-x^2-y^2}{2}$ והמישור $z=0$ עם פונקצית צפיפות $\rho=\frac{1}{\sqrt{1-z}}$

(<u>הדרכה</u>: יש שתי דרכים לפתור, מספיק אחת, אך תוכלו להיעזר בדרך השניה כדי לוודא את נכונותה של הראשונה).

פתרון:



נגדיר את השדה: $A=\left(0,0,-2\sqrt{1-z}\right)$ כך ש: $div(A)=\rho$ וניעזר במשפט גאוס:

לחישוב הנורמל החיצוני של הפרבולואיד S נתארו ע"י: $F(x,y,z)=2z+x^2+y^2-1=0$

ואז: $\hat{n}=\frac{(x,y,1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=\frac{(x,y,1)}{\sqrt{2}\sqrt{1-z}}$ לכן: $A\bullet\hat{n}=-\sqrt{2}$.

גורם ההטלה על $D=\left\{x^2+y^2\le 1\right\}$ הוא: $\frac{1}{n_3}$.

על המישור $z=0$ הנורמל החיצוני הוא: $(0,0,-1)$. מכאן:

$$\iiint_V \rho dV = \oint\!\!\!\oint_{\partial V} A\bullet\hat{n}\, dS = \iint_D (0,0,-2)\bullet(0,0,-1) dS - \sqrt{2}\iint_S dS = 2\left|D\right| - \sqrt{2}\iint_D \frac{1}{n_3} dD = 2\pi - \sqrt{2} I$$

$$I = \iint_D \sqrt{2-2z}\ dD = \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\ dD = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \underset{J}{r}\sqrt{1+r^2} dr = 2\pi\left[\frac{1}{3}\left(1+r^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

לכן בסה"כ: $\iiint_V \rho dV = 2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\right) = 2\pi\left(1-\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

אפשר גם לחשב את המסה ישירות באמצעות קורדינטות גליליות:

$$\iiint_V \rho dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/2} \frac{dz}{\sqrt{1-z}} \int_0^{\sqrt{1-2z}} \underset{J}{r}\, dr = 2\pi \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-z}}\cdot\frac{1-2z}{2} dz = \pi \int_0^{1/2} \frac{1-2z}{\sqrt{1-z}} dz$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{1-z} - \frac{2(1-z)^{3/2}}{3}\right]_0^{1/2} = 2\pi\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} - \left(1-\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{2}-1\right) .$$