תזכורת:

1) הגדרנו פעולה של חבורה G על קבוצה X.

$G\times X\to X \quad (g*x\in X)$

ומתקיים:

1) $\forall x\in X: e*x=x$

$\forall g,h\in G, x\in X: (gh)*x=g*(h*x)$

דוגמאות:

1) S_n פועלת על $\{1,\dots,n\}$

2) S_n פועלת על $F[x_1,\dots,x_n]$

3) $GL_n(F)$ פועלת על F^n

4) G פועלת על עצמה על ידי $g*x=gx$

5) G פועלת על עצמה על ידי $g*x=gxg^{-1}$

הגדרות:

1) לכל $x\in X$ $Orb(x)=\{g*x \mid g\in G\}\subseteq X$

2) לכל $x\in X$ $Stab(x)=\{g \mid g*x=x\}\leq G$

הגדרה:

G פועלת על עצמה על ידי הצמדה

1) המסלול של איבר נקרא גם "מחלקת הצמידות". ומסמנים: $Conj(x)$

2) המייצב של x נקרא גם המְרַכֵּז של x. מסמנים: $C_G(x)$

$C_G(x)=\{g\in G \mid g^{-1}xg=x\}=\{g\in G : xg=gx\}$

המרכֵּז של איבר הוא כל האיברים בחבורה שמתחלפים איתו.

תרגיל:

תהי G חבורה ו- $g\in G$. נסמן $O(g)=n$ ונניח ש- g הוא האיבר היחיד ב- G מסדר n. הוכיחו $g\in Z(G)$

פתרון:

G פועלת על עצמה על ידי הצמדה

טענת עזר 1: $Conj(x)=\{x\} \Longleftrightarrow g\in Z(G)$

$(\Leftarrow)$

$$Conj(x)=\{g^{-1}xg \mid g\in G\} \underset{x\in Z(G)}{=} \{g^{-1}gx \mid g\in G\}=\{x\}$$

$(\Rightarrow)$

$$\{x\}=conj(x)=\{g^{-1}xg \mid g\in G\}$$

כלומר, לכל $g\in G$ $\quad g^{-1}xg=x$ ולכן $xg=gx$

סה"כ $x\in Z(G)$

טענת עזר 2: לאיברים צמודים יש את אותו הסדר

נניח x,y צמודים. כלומר, קיים $g\in G$ כך ש $g^{-1}xg=y$

נסמן $O(x)=n$, $O(y)=m$

נעלה את המשוואה ב- n

$$(g^{-1}xg)^n=y^n \Rightarrow g^{-1}x^ng=y^n \Rightarrow g^{-1}g=y^n \Rightarrow y^n=e \Rightarrow m\leq n$$

מצד שני:

$$x=gyg^{-1} \Rightarrow x^m=gy^mg^{-1} \Rightarrow x^m=e \Rightarrow n\leq m$$

ולכן $n=m$

ום. $o(g)=n$, ואין איבר אחר מסדר n. אז, g הוא האיבר היחיד
ב- $conj(g)$ ומטענה 1 $g\in Z(g)$

מחלקות צמידות ב-S_n:

תזכורת: כל איבר ב-S_n ניתן לכתוב כמכפלה של מחזורים זרים

יהי $\sigma\in S_n$. "מבנה המחזורים" של σ הוא "סדרה" של אורכי המחזורים בפירוק שלו

למשל:

1. $(1,2)(3,7,6)$ - מבנה מחזורים $2,3$
2. $(1,3,6)(7,2)(4,5)$ - מבנה מחזורים $3,2,2$

משפט:

מחלקת הצמידות של איבר ב-S_n = כל האיברים עם אותו מבנה מחזורים

"הוכחה":

בש.ב. ראינו את הטענה הבאה:

$$\tau\cdot(a_1,\dots,a_k)\tau^{-1}=(\tau(a_1),\dots,\tau(a_k))$$

הכללה:

$$\tau(a_1\dots a_k)(a_{k+1}\dots a_l)\dots(a_m\dots a_n)\tau^{-1}=$$

$$=\tau(a_1\dots a_k)\tau^{-1}\cdot\tau(a_{k+1}\dots a_l)\tau^{-1}\tau(a_m\dots a_n)\tau^{-1}=$$

$$=(\tau(a_1)\dots\tau(a_k))(\tau(a_{k+1})\dots\tau(a_l))(\tau(a_m)\dots\tau(a_n))$$

קיבלנו איבר עם אותו מבנה מחזורים

בנוסף, לכל שני איברים עם אותו מבנה מחזורים יש τ מתאים שיעביר ביניהם

דוגמא:

כמה מחלקות צמידות יש ב-S_5?

פתרון:

צריך לספור מבני מחזורים שונים

$S = 1+1+1+1+1$

$S = 1+1+1+2$

$S = 1+1+3$

$S = 1+4$

$S = 2+3$

$S = 2+2+1$

$S = 5$

משפט: (מסלול-מייצב)

אם G פועלת על X. לכל $x \in X$ $|Orb(x)| = [G:Stab(x)]$

אם G חבורה סופית אז:

$$|Orb(x)| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$$

תרגיל:

כמה איברים ב-S_n מתחלפים עם $(1,2)(3,4)$

פתרון:

צריך לחשב את $|C_{S_n}(1,2)(3,4)|$ זה שווה בדיוק למייצב ביחס לפעולת ההצמדה. S_n סופית, ולכן $|C_{S_n}(1,2)(3,4)| = \frac{|S_n|}{|Stab(1,2)(3,4)|}$

נחשב $|Konj(1,2)(3,4)|$. אלה כל התמורות שמבנה המחזורים שלהם הוא $2,2$. הגודל הוא: $\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$ (הסדר בין שני מחזורים לא משנה)

$$C_{S_n}(1,2)(3,4) = \frac{2\cdot n!}{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}} = 8\cdot(n-4)!$$

משוואת המחלקות:

יהי G פועלת על X $X=\bigcup_{x\in X} orb(x)$ ולכן

$$|X| = |\underset{\text{fixed point}}{\overset{fix(X)}{}}| + \sum_{x\notin fix(X)} |orb(x)|$$

נקודות שבת

כל מחלקת צמידות נספרת פעם אחת

מקרה פרטי:

G פועלת על עצמה על ידי הצמדה

$$|G| = |Z(G)| = \sum_{x\notin Z(G)} |conj(x)|$$

כל מחלקת צמידות נספרת פעם אחת

הערה: ממשפט מסלול מייצב $|orb(x)| \mid |G|$ ולכן

$\forall g\in G: |conj(g)| \mid |G|$

הגדרה: נגיד שחבורה סופית G היא חבורת-P אם $|G|=p^n$ (p ראשוני)

משפט:

אם G היא חבורת-p המרכז של G לא טריוויאלי

כלומר $Z(G)\neq\{e\}$

הוכחה:

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{x\in Z(G)} |conj(x)|$$

$\forall x\notin Z(G)$ $1\neq |conj(x)| \mid p^n$

לכן $|conj(x)| = p^{r_x}$
$0<r<n$

$$p^n = |Z(G)| + \sum_{x\notin Z(G)} p^{r_x}$$

ניתן להסיק $P\,|\,|Z(G)|$ ומכיוון ש $|Z(G)|\neq 0$ כי $P\in Z(G)$

ניתן להסיק $P\leq |Z(G)|$ ובפרט $Z(G)\neq\{e\}$

תרגיל:

נתון שהחבורה $G=\left\{\begin{pmatrix}1&a&b\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$ פועלת על קבוצה X מגודל 223. הוכיחו שיש נקודת שבת

פתרון:

$$223=|fix(X)|+\sum_{x\notin fix(X)}|orb(x)|$$

$$|orb(x)|=3\vee 9\vee 27 \Leftarrow |orb(x)|\,\big|\,|G|=27$$

$$223=|fix(X)|+\underbrace{3\alpha}_{\text{מספר המסלולים מגודל 3}}+9\beta+27\gamma$$

ומכיוון ש $3\nmid 223$ אז $|fix(X)|\neq 0$

הגדרה:

נגיד ש G פועלת על X טרנזיטיבית אם אחת מההגדרות השקולות הבאות מתקיימות:

- יש רק מסלול אחד בפעולה
- $\forall x\in X$, $orb(x)=X$
- $\forall x,y\in X\ \exists g\in G : gx=y$

דוגמאות:

1) G פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל - הפעולה טרנזיטיבית

2) החבורה היחידה שבה פעולת ההצמדה היא טרנזיטיבית היא $G=\{e\}$

הסבר:

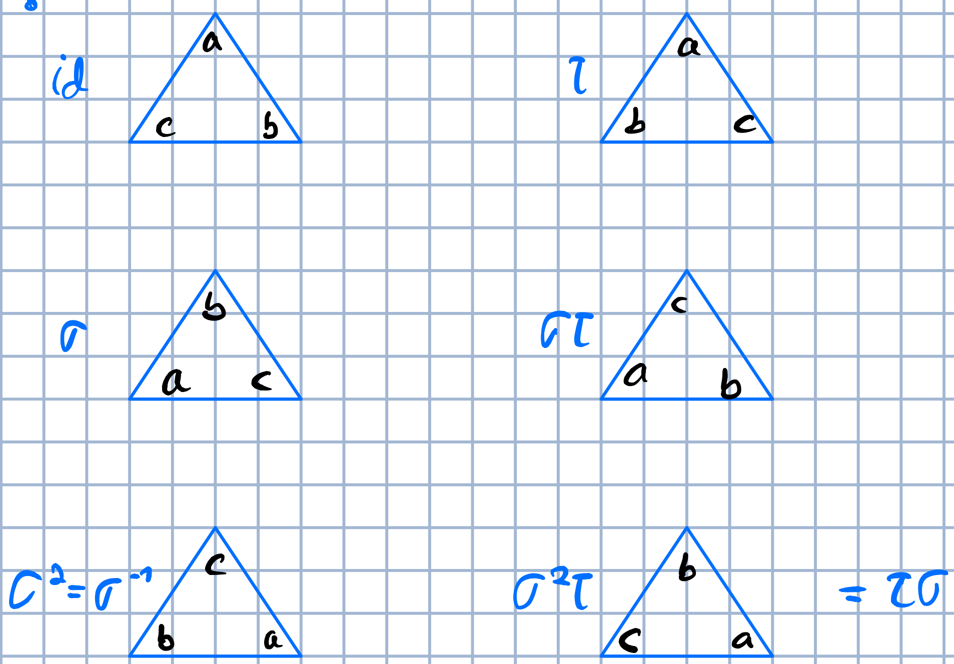
$$\forall g\in G: g^{-1}eg=e \Rightarrow conj(e)=\{e\}$$

לכן אם יש רק מסלול אחד, אז החבורה כולה שווה ל- $\{e\}$

הגדרה:

החבורה הדיהדרלית: D_n

D_3:



הגדרה פורמלית:

$D_n = \langle \sigma, \tau \rangle$ שמקיימים $\tau^2 = id$, $\sigma^n = id$, $\tau\sigma = \underbrace{\sigma^{-1}\tau}_{\sigma^{n-1}\tau}$

כל האיברים בחבורה הם מהצורה $\tau^i\sigma^j$ וניתן להכפיל לפי הנוסחאות.

דוגמאות:

1) ב- D_5 $(\tau\sigma^4)(\tau\sigma^3) = \tau(\tau\sigma)\sigma^3 = \sigma^4$

ב- D_5 $(\tau\sigma^3)(\tau\sigma^4) = (\tau\sigma^{-3}) = \tau\sigma^2$

$\tau\sigma = \sigma^{-1}\tau$

$\sigma\tau = \tau\sigma^{-1}$

הערות:

1. ב D_n יש $2n$ איברים, ב. לכל $n \geq 3$ D_n לא אבלית