גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו - תרגיל 12

7 ביוני 2016

1. יהי M משטח עם פרמטריזציה $X(u,v)$. הוכיחו שמתקיים:

$$\sqrt{\det(g)_{ij}} = \|X_u \times X_v\|$$

רמז: השתמשו בזהות בינה־קושי שראינו בתחילת הקורס:

$$\langle a \times b, c \times d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$$

לכל $a,b,c,d \in \mathbb{R}^3$.

2. חשבו את שטח המשטחים הבאים:

(א) הטורוס שהוא משטח הסיבוב של העקומה:

$$\gamma(\phi) = (a\cos\phi + b, 0, a\sin\phi)$$

כאשר $\phi \in [0, 2\pi]$ וכאשר $0 < a < b$.

(ב) החרוט שהוא משטח הסיבוב של העקומה:

$$\gamma(\phi) = (\phi, 0, \phi)$$

כאשר $\phi \in [0,1]$.

(ג) ההליקואיד:

$$f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$$

כאשר $(u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.

3. משטח M ב־$\mathbb{R}^3$ נתון על ידי המשוואה:

$$z^2 + \left(x^2 + y^2 - 1\right)\left(2x^2 + 3y^2 - 1\right) = 0$$

חשבו:

$$\iint\limits_M K dS$$

כאשר K היא עקמומיות גאוס של המשטח, כמובן.

4. תהיינה $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ איזומטריות, כאשר המטריקה על $\mathbb{R}^3$ היא המטריקה הסטנדרטית:

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2}$$

האם הפונקציות הבאות הן איזומטריות?

(א) $h=f+g$.

(ב) $h=f\times g$.

(ג) $h=f\circ g$.

(ד) $h=c\cdot f$, כאשר $c\in\mathbb{R}$.

5. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:
יהיו M_1,M_2 שני משטחים ב־$\mathbb{R}^3$ כך שעקמומיות גאוס שלהם קבועה ושווה. אזי קיימת איזומטריה בין M_1 לבין M_2.