דף תרגילים 10

תרגיל 1 נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y)=-3x^2+4xy-6y^2$.

א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x,y)=-1$. לאפיין את העקומה.

ב. לאפיין את המשטח המתקבל כגרף של התבנית הריבועית $z=Q(x,y)$.

ג. למצוא את עקמומיות גאוס של משטח זה בראשית הצירים.

פתרון 1

א.

$$S=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -6\end{pmatrix}$$

ערכים עצמיים $-2,-7$ (אין צורך למצוא מטריצה מלכסנת, כי אין איברים ליניאריים.) לאחר שינוי הקואורדינטות:

$$-2x^2-7y^2+1=0$$

כלומר זו אליפסה.

ב.

$$-3x^2+4xy-6y^2-z=0$$

$$S=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 2 & -6 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לפי החישוב שכבר עשינו בסעיף א' הע"ע הם $-2,-7,0$. כמו כן ציר z יהיה אינוואריאנטי תחת הלכסון, והאיבר הלינארי היחיד הוא z. לכן אין צורך למצוא מטריצה מלכסנת, והצורה האלכסונית אחרי החלפת קואורדינטות היא:

$$z=-2x^2-7y^2$$

כלומר זהו פרבולואיד אליפטי.

ג. הנקודה $(0,0)$ נקודה קריטית של $f(x,y)=-3x^2+4xy-6y$ כי $\nabla f=\vec{0}$, לכן

$$K(0,0)=det(W_p)=det(H_f)=\begin{vmatrix}-6 & 4\\ 4 & -12\end{vmatrix}=56.$$

תרגיל 2 נסתכל על המשטח שהוא הגרף של הפונקציה $f(x,y)=y^4$.

א. מיצאו פרמטריזציה, וקטור נורמל.

ב. מהי עקמומיות גאוס בכל נקודה של המשטח?

ג. בנקודות הקריטיות של $f(x,y)$, ודאו את תשובתכם באמצעות חישוב מטריצת ההסיאן.

פתרון 2

א. נמשיך לעבוד בקואורדינטות x,y כלומר נבחר פרמטריזציה $\underline{x}(x,y)=(x,y,y^4)$ ואז

$$x_1=(1,0,0)$$
$$x_2=(0,1,4y^3)$$

נחשב נורמל. נסמן נירמול של וקטור $\widehat{v}=\frac{v}{|v|}$. אז

$$n=\widehat{x_1\times x_2}=\widehat{\begin{vmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4y^3\end{vmatrix}}$$
$$=\widehat{\begin{pmatrix}0\\ -4y^3\\ 1\end{pmatrix}}=(1+16y^6)^{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}0\\ -4y^3\\ 1\end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{cases}x_{11}=(0,0,0)\\ x_{12}=(0,0,0)\\ x_{22}=(0,0,12y^2)\end{cases}$$

כלומר

$$L_{ij}=\begin{pmatrix}\langle x_{11},n\rangle & \langle x_{12},n\rangle\\ \langle x_{12},n\rangle & \langle x_{22},n\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{12y^2}{\sqrt{1+16y^6}}\end{pmatrix}$$

לסיום $K=\frac{det(L_{ij})}{det(g_{ij})}=\frac{0}{det(g_{ij})}=0$ כלומר עקמומיות גאוס 0 בכל נקודה.

ג. הנקודות הקריטיות הן הנקודות של הישר $y=0$. שם מתקיים

$$H_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

בנקודות אלו $K = det(H_f) = 0$.

תרגיל 3

א. מיצאו פרמטריזציה של חרוט כמשטח סיבוב של העקומה $(r(\phi), z(\phi)) = (\phi, a\phi)$ באשר $a > 0$. מיצאו את מקדמי התבנית היסודית הראשונה והשניה, ואת עקמומיות גאוס.

ב. מיצאו את מקדמי Γ^k_{ij} ואת המשוואות הגאודזיות.

פתרון 3

א. פרמטריזציה

$$x(\theta, \phi) = (\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, a\phi)$$

$$\begin{cases} x_1 = (-\phi\sin\theta, \phi\cos\theta, 0) \\ x_2 = (\cos\theta, \sin\theta, a) \end{cases}$$

תבנית יסודית ראשונה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

נחשב תבנית יסודית שניה:

$$\begin{cases} x_{11} = (-\phi\cos\theta, -\phi\sin\theta, 0) \\ x_{12} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ x_{22} = (0,0,0) \end{cases}$$

$$n = \widehat{x_1 \times x_2} = \widehat{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\phi\sin\theta & \phi\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & a \end{vmatrix}}$$

$$= \widehat{\begin{pmatrix} a\phi\cos\theta \\ a\phi\sin\theta \\ -\phi \end{pmatrix}} = \phi^{-1}(1+a^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a\phi\cos\theta \\ a\phi\sin\theta \\ -\phi \end{pmatrix}$$

$$= (1+a^2)^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ -1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \langle x_{11}, n\rangle & \langle x_{12}, n\rangle \\ \langle x_{12}, n\rangle & \langle x_{22}, n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a\phi}{\sqrt{1+a^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עקמומיות גאוס

$$K = \frac{det(L_{ij})}{det(g_{ij})} = \frac{0}{det(g_{ij})} = 0$$

ב. כפי שראינו בסעיף א'

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \phi^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{pmatrix}$$

וכן

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 2\phi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

רק $g_{11;2} = 2\phi$ שונה מ־0.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{2\phi} + g_{12;1})g^{22} = \frac{-\phi}{1+a^2}$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{2\phi} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{1}{\phi}$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0$$
$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases} \alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma^1_{ij} + \alpha^{1\prime\prime} = 0 \\ \alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma^2_{ij} + \alpha^{2\prime\prime} = 0 \end{cases}$$

אצלנו

$$\Gamma^2_{11} = \frac{-\phi}{1+a^2} \qquad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{\phi}$$

לכן במשוואה הראשונה רק $\Gamma_{12}^1 \neq 0$ כלומר היא

$$2\alpha^{1'}\alpha^{2'}\frac{1}{\phi}+\alpha^{1''}=0$$

במשוואה השניה רק $\Gamma_{11}^2 \neq 0$ כלומר היא

$$\left(\alpha^{1'}\right)^2\frac{-\phi}{1+a^2}+\alpha^{2''}=0$$

תרגיל 4

א. מיצאו פרמטריזציה של טורוס כמשטח סיבוב של $(r(\phi),z(\phi))=(5+2\cos\phi,2\sin\phi)$.

ב. מיצאו את מקדמי התבנית היסודית הראשונה והשניה, ואת עקמומיות גאוס.

ג. מהן הנקודות בהן עקמומיות גאוס חיובית? שלילית? אפס?

ד. מיצאו את מקדמי Γ_{ij}^k ואת המשוואות הגאודזיות.

פתרון 4

א. פרמטריזציה

$$x(\theta,\phi)=((5+2\cos\phi)\cos\theta,(5+2\cos\phi)\sin\theta,2\sin\phi)$$

ב. תבנית יסודית ראשונה

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}r^2 & 0\\ 0 & \left|\frac{d\alpha}{d\phi}\right|^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(5+2\cos\phi)^2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

למציאת תבנית יסודית שניה נחשב תחילה נגזרות שניות

$$\begin{cases}x_1=(-(5+2\cos\phi)\sin\theta,(5+2\cos\phi)\cos\theta,0)\\ x_2=(-2\sin\phi\cos\theta,-2\sin\phi\sin\theta,2\cos\phi)\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_{11}=(-(5+2\cos\phi)\cos\theta,-(5+2\cos\phi)\sin\theta,0)\\ x_{12}=(2\sin\phi\sin\theta,-2\sin\phi\cos\theta,0)\\ x_{22}=(-2\cos\phi\cos\theta,-2\cos\phi\sin\theta,-2\sin\phi)\end{cases}$$

כעת נחשב נורמל

$$x_1 \times x_2 = (2(5+2\cos\phi)\cos\phi\cos\theta, 2(5+2\cos\phi)\cos\phi\sin\theta, 2(5+2\cos\phi)\sin\phi)$$

וקטור זה פרופורציוני ל־

$$(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi)$$

וזהו וקטור בעל אורך 1 כלומר זהו הנורמל.

לכן תבנית יסודית שניה

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \langle x_{11}, n\rangle & \langle x_{12}, n\rangle \\ \langle x_{12}, n\rangle & \langle x_{22}, n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\phi(5+2\cos\phi) & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

עקמומיות גאוס

$$K = \frac{det(L_{ij})}{det(g_{ij})} = \frac{2\cos\phi(5+2\cos\phi)}{4(5+2\cos\phi)^2} = \frac{\cos\phi}{2(5+2\cos\phi)}$$

ג. סימן $K = \frac{\cos\phi}{2(5+2\cos\phi)}$ הוא כסימן $\cos\phi$, כלומר

(א) $K = 0$ כאשר $\phi = \frac{\pi}{2}$ ו־ $\phi = \frac{3\pi}{2}$

(ב) $K > 0$ כאשר $\frac{-\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$

(ג) $K < 0$ כאשר $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$

ד. כפי שראינו בסעיף ב'

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (5+2\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} (5+2\cos\phi)^{-2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

וכן

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} -2\sin\phi(5+2\cos\phi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

רק $g_{11;2} = -2\sin\phi(5+2\cos\phi)$ שונה מ־0.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{-2\sin\phi(5+2\cos\phi)} + g_{12;1})g^{22} = \frac{1}{4}\sin\phi(5+2\cos\phi)$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{-2\sin\phi(5+2\cos\phi)} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{-\sin\phi}{5+2\cos\phi}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases} \alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma^1_{ij} + \alpha^{1\prime\prime} = 0 \\ \alpha^{i\prime}\alpha^{j\prime}\Gamma^2_{ij} + \alpha^{2\prime\prime} = 0 \end{cases}$$

אצלנו

$$\Gamma^1_{12} = \frac{-\sin\phi}{5+2\cos\phi} \qquad\qquad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{4}\sin\phi(5+2\cos\phi)$$

לכן במשוואה הראשונה רק $\Gamma^1_{12} \neq 0$ כלומר היא

$$2\alpha^{1\prime}\alpha^{2\prime}\frac{-\sin\phi}{5+2\cos\phi} + \alpha^{1\prime\prime} = 0$$

במשוואה השניה רק $\Gamma^2_{11} \neq 0$ כלומר היא

$$\left(\alpha^{1\prime}\right)^2 \frac{1}{4}\sin\phi(5+2\cos\phi) + \alpha^{2\prime\prime} = 0$$

תרגיל 5 לבטא ע"י המקדמים $g_{ij}, L_{ij}, L^i{}_j, \Gamma^k_{ij}$ ולפשט ככל הניתן:

א. $\langle x_j, x_{pq}\rangle g^{jp}$

ב. $\langle x_{pqr}, n\rangle$

ג. $\langle x_{pq}, n_s\rangle \delta^q_m$

ד. $g_{pq}\delta^q_s g^{st}\delta^p_t$

ה. $\langle x_{ij}, n_k\rangle \delta^k{}_m g^{m\ell}$

ו. $\langle n_i, x_j\rangle g^{i\ell}$

ז. $\langle n_i, n_j\rangle$

ח. $\langle n, n_{ab}\rangle \delta^a_c$

ט. $|x_{ij}|^2$

י. $\langle x_{ij}, x_k\rangle \delta^k{}_m g^{m\ell}$

פתרון 5

א. סכימה j ,p, חופשי q.

$$\begin{aligned}
\langle x_j, x_{pq}\rangle g^{jp} &= \langle x_j, \Gamma^k_{pq} x_k + L_{pq} n\rangle g^{jp} \\
&= \left(\Gamma^k_{pq}\langle x_j, x_k\rangle + L_{pq}\langle x_j, n\rangle\right) g^{jp} \\
&= \Gamma^k_{pq} g_{jk} g^{jp} \\
&= \Gamma^k_{pq} g_{kj} g^{jp} \\
&= \Gamma^k_{pq} \delta^p_k \\
&= \Gamma^p_{pq}
\end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned}
\langle x_{pqr}, n\rangle \overbrace{=}^{Leibniz} & \langle x_{pq}, n\rangle_r - \langle x_{pq}, n_r\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial u^r} L_{pq} - \langle x_{pq}, n_r\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial u^r} L_{pq} - \langle \Gamma^k_{pq} x_k + L_{pq} n, L^\ell{}_r x_\ell\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial u^r} L_{pq} - \Gamma^k_{pq} L^\ell{}_r g_{k\ell} \\
&= \frac{\partial}{\partial u^r} L_{pq} + \Gamma^k_{pq} L_{kr}
\end{aligned}$$

ג. סכימה q, חפשיים p, s, m.

$$\begin{aligned}\langle x_{pq}, n_s\rangle \delta^q_m &= \langle x_{pm}, n_s\rangle \\ &= \langle \Gamma^k_{pq} x_k + L_{pq} n, L^{\ell}{}_s x_\ell\rangle \\ &= \Gamma^k_{pq} L^{\ell}{}_s g_{k\ell} \\ &= \Gamma^k_{pq}\left(g_{k\ell} L^{\ell}{}_s\right) \\ &= -\Gamma^k_{pq} L_{ks}\end{aligned}$$

ד. סכימה q, s, t, p.

$$\begin{aligned}g_{pq}\delta^q_s g^{st}\delta^p_t &= g_{ts} g^{st} \\ &= \delta^t_t \\ &= Tr(I_2) \\ &= 2\end{aligned}$$

ה. סכימה m, k, חפשיים ℓ, i, j.

$$\begin{aligned}\langle x_{ij}, n_k\rangle \delta^k{}_m g^{m\ell} &= \langle x_{ij}, n_k\rangle g^{k\ell} \\ &= \langle \Gamma^a_{ij} x_a + L_{ij} n, n_k\rangle g^{k\ell} \\ &= \left(\Gamma^a_{ij} \overbrace{\langle x_a, n_k\rangle}^{-L_{ak}} + L_{ij} \overbrace{\langle n, n_k\rangle}^{0}\right) g^{k\ell} \\ &= -\Gamma^a_{ij} L_{ak} g^{k\ell} \\ &= -\Gamma^a_{ij}\left(g^{\ell k} L_{ka}\right) \\ &= \Gamma^a_{ij} L^{\ell}{}_a\end{aligned}$$

ו. סכימה i, חפשיים j, ℓ.

$$\begin{aligned}\langle n_i, x_j\rangle g^{i\ell} &= L_{ij} g^{i\ell} \\ &= g^{\ell i} L_{ij} \\ &= -L^{\ell}{}_j\end{aligned}$$

ז.

$$\begin{aligned}\langle n_i, n_j\rangle &= \langle L^k{}_i x_k, L^\ell{}_j x_\ell\rangle\\ &= L^k{}_i L^\ell{}_j \langle x_k, x_\ell\rangle\\ &= L^k{}_i L^\ell{}_j g_{k\ell}\\ &= L^k{}_i \left(g_{k\ell} L^\ell{}_j\right)\\ &= -L^k{}_i L_{kj}\end{aligned}$$

ח. סכימה a, חפשיים b, c.

$$\begin{aligned}\langle n, n_{ab}\rangle\delta^a_c &= \langle n, n_{cb}\rangle\\ &= \langle n, n_c\rangle_b - \langle n_b, n_c\rangle\\ &= \overbrace{\langle n, L^k{}_c x_k\rangle_b}^{0} - \langle L^m_b x_m, L^\ell{}_c x_\ell\rangle\\ &= -L^m_b L^\ell{}_c \langle x_m, x_\ell\rangle\\ &= -L^m_b L^\ell{}_c g_{m\ell}\\ &= L^m_b L_{mc}\end{aligned}$$

ט.

$$\begin{aligned}|x_{ij}|^2 &= \langle x_{ij}, x_{ij}\rangle\\ &= \langle \Gamma^k_{ij} x_k + L_{ij} n, \Gamma^m_{ij} x_m + L_{ij} n\rangle\\ &= \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{ij}\langle x_k, x_m\rangle + (L_{ij})^2 \overbrace{\langle n, n\rangle}^{1}\\ &= \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{ij} g_{km} + (L_{ij})^2\end{aligned}$$

י. סכימה k, m, חפשיים ℓ, i, j.

$$
\begin{aligned}
\langle x_{ij}, x_k \rangle \delta^k{}_m g^{m\ell} &= \langle x_{ij}, x_k \rangle g^{k\ell} \\
&= \langle \Gamma^a_{ij} x_a + L_{ij} n, x_k \rangle g^{k\ell} \\
&= \Gamma^a_{ij} \langle x_a, x_k \rangle g^{k\ell} \\
&= \Gamma^a_{ij} g_{ak} g^{k\ell} \\
&= \Gamma^a_{ij} \delta^\ell_a \\
&= \Gamma^\ell_{ij}
\end{aligned}
$$