תזכורת:

R חוג, S תת-קבוצה. S היא אידאל שמאלי (ימני) אם:

1) S סגור לחיבור
2) $a\in S \Rightarrow -a\in S$

$\left.\right\}$ $(S,+)$ תת חבורה של $(R,+)$

3) $ra\in S$ לכל $a\in S,\ r\in R$ (ימני - $ar\in S$ לכל $a\in S,\ r\in R$)

אידאל = אידאל דו-צדדי = גם שמאלי וגם ימני

דוגמאות:

1) R חוג כלשהו. $I=R$ אידאל

הגדרה: אידאל $I\subsetneq R$ נקרא נאות (או אמיתי)

2) R חוג, $I=\{0\}$

3) R חוג, $A\subseteq R$ תת קבוצה. $RA=\{r_1a_1+\dots+r_na_n : r_i\in R, a_i\in A \quad i\in I\}$

אידאל שמאלי

$$\sum r_ia_i+\sum r_i'a_i=\sum(r_i+r_i')a_i\in RA$$

$$r\sum r_ia_i=\sum(rr_i)a_i\in RA$$

RA נקרא האידאל השמאלי הנוצר ע"י A.

RA הוא האידאל השמאלי הקטן ביותר שמכיל את A

$AR=\{a_1r_1+\dots+a_nr_n : a_i\in A, r_i\in R\}$ אידאל ימני הנוצר ע"י A

$(A)=RAR=\{r_1a_1r_1'+\dots+r_na_nr_n' : a_i\in A \quad r_i\in R,\ r_i'\in R\}$

אידאל הנוצר ע"י A

אם R חילופי $RA=AR=RAR$

הגדרה: יהי I אידאל. קבוצה $A\subseteq R$ נקראת קבוצת יוצרים אם $I=(A)$

לדוגמה $A=I$ עובד

אם יש קבוצת יוצרים $A=\{a\}$ בעלת איבר אחד, נאמר ש-I ראשי
Principal ideal

דוגמאות:

4) $R=M_n(\mathbb{R})$ $\quad a=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$

$Ra=\{Ma : M\in M_n(\mathbb{R})\}=\{$מטריצות עם עמודה ראשונה של אפסים$\}$

$aR=\{aM : M\in M_n(\mathbb{R})\}=\{$מטריצות עם שורה ראשונה של אפסים$\}$

$M+Ra=\{$המטריצות עם העמודה הראשונה של $M\}$

אם ננסה להגדיר R/Ra, הכפל לא מוגדר היטב:

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\1&1\end{pmatrix}$$

לא באותה מחלקה! $\Rightarrow$ קיימים אידיאלים חד-צדדיים

5) $R=R'[x]$, $I=(x^2)=\{f\cdot x^2 : f\in R[x]\}$

R' חוג כלשהו

$$I=\left\{\sum_{n=0}^{k}a_nx^n : a_0=a_1=0\right\}=\left\{\sum_{n=2}^{k}a_nx^n\right\}$$

$f=\sum b_ix^i \qquad f+I=\{b_0+b_1x+O(x^2)\}$

$(a_0+a_1x+\dots)(b_0+b_1x+\dots)=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+\dots$

$Rx^2=x^2R \Leftarrow x^2\in Z(R)=\{a\in R : ar=ra \quad \forall r\in R\}$

R חילופי $\iff R=Z(R)$

R לא חילופי $\Leftarrow Z(R)$ לא אידיאל, כי $1\in Z(R)$

הערה:

R חוג, $a\in Z(R)$, $A\subseteq Z(R)$ $\Leftarrow RA=AR$ אידיאל דו צדדי

סימונים:

$I\lhd R$ אידיאל, $I\le_l R$ אידיאל שמאלי, $I\le_r R$ אידיאל ימני

6) R חוג, $I,J \triangleleft R$ אידיאלים (גם שמאליים או ימניים), אזי.

$I \cap J$ אידיאל (גם שמאלי/ימני)

$I+J=\{i+j : i\in I, j\in J\}$ אידיאל (גם שמאלי/ימני)

$IJ=\{ij : i\in I, j\in J\}$

אם $I,J \triangleleft R \Leftarrow IJ \subseteq I\cap J$

הגדרה: R חוג. איבר $a\in R$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $a^n=0$

7) R חילופי. הנילרדיקל (nilradical) של R הוא $\eta(R)=\{a\in R : a \text{ נילפוטנטי}\}$

טענה:

$\eta(R)\triangleleft R$

הוכחה:

יהי $a\in\eta(R)$, $a^n=0$. $ra\in\eta(R) \Leftarrow (ra)^n \underset{\text{חילופי}}{=} r^n a^n = r^n 0 = 0$

סגירות לחיבור: $a,b\in\eta(R)$. $a^n=0, b^m=0$

$$(a+b)^{n+m}=\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m-1}{k}_R a^k b^{n+m-1+k}$$

כל מחובר שווה ל-0. וכן,

$k\geq n \Rightarrow a^k=a^n\cdot a^{k-n}=0$

$k<n \Rightarrow n+m-1-k\geq m \Rightarrow b^{n+m-1-k}=0$

ולכן $(a+b)\in\eta(R)$

8) יהי $f:R\to S$ הומו' של חוגים. יהי $I\triangleleft S$ (גם שמאלי או ימני). אזי, המקור $f^{-1}(I)=\{a\in R : f(a)\in I\}$ אידיאל (שמאלי/ימני) של R. כי:

אם I אידיאל שמאלי

$a\in f^{-1}(I)$, $r\in R$ $\quad f(ra)=\underbrace{f(r)}_{S}\underbrace{f(a)}_{I}\in I$

9) $f:R\to S$ הומ׳, יהי $R'\le R$ תת-חוג-בלי-יחידה. אזי $f(R')\le S$ תת-חוג-בלי-יחידה.

$$a,b\in f(R') \Rightarrow c,d\in R' \quad \begin{matrix} a=f(c) \\ b=f(d) \end{matrix} \Rightarrow ab=f(\underbrace{cd}_{\in R'})$$

הערה: $f:R\to S$ הומ׳ של חוגים. תמונה של אידאל לא בהכרח אידאל.

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[x]$, $f(2\mathbb{Z})=\{a_0:a_0\in 2\mathbb{Z}\}$ לא אידאל (לא מימין ולא משמאל)

אם כן היה אידאל הוא היה מכיל את $2x^5$

10) אם $f:R\to S$ הומ׳ על (אפימורפיזם) אזי $I\le R$ אידאל (שמאלי/ימני)

$\Rightarrow f(I)$ אידאל (שמאלי/ימני)

הוכחה:

I אידאל שמאלי $\Rightarrow f(a')=a\in f(I) \quad a'\in I$

$f(r)=s\in S \quad r\in R$

על f

$sa=f(\underbrace{ra'}_{\in I})\in f(I) \Rightarrow f(I)$ אידאל שמאלי (באופן דומה עבור אידאל ימני)

משפט האיזומורפיזם הרביעי:

יהי R חוג, $I\trianglelefteq R$ אידאל. תהי $f:R\to R/I$ ההטלה הטבעית, $f(r)=r+I$. אזי יש התאמה

חח״ע ועל $\{$אידאלים שמאליים/ימניים של R שמכילים את $I\}\longleftrightarrow\{$אידאלים שמאליים/ימניים של $R/I\}$

$$L\trianglelefteq R/I \to I\le f^{-1}(L)$$

$I\le J\trianglelefteq R \to f(J)\trianglelefteq R/I$ (כי f על)

$L=f(f^{-1}(L))$ כי f על. $f^{-1}(f(J))\supseteq J$

מצד שני, יהי $a\in f^{-1}(f(J))$. אזי $f(a)\in f(J) \Rightarrow$ קיים $j\in J$ כך ש $f(a)=f(j)$

$$\Rightarrow f(a-j)=0_{R/I} \Rightarrow a-j\in I\le J \Rightarrow a\in J \Rightarrow f^{-1}(f(J))=J$$