תרגיל בית 6 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

שאלה 1 (חימום). מצאו איבר מסדר 30 בחבורה S_{10}.

שאלה 2. רמז: הסעיפים הבאים דורשים קצת קומבינטוריקה.

א. מצאו כמה איברים מסדר 6 יש בחבורה S_6.

ב. מצאו כמה איברים מסדר 2 יש בחבורה S_6.

שאלה 3. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2, את σ^{20} ואת $o(\sigma)$.

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$.

ב. $(1\ 2)\,(2\ 5\ 4)\,(3\ 1\ 4)\,(1\ 5) \in S_5$.

ג. $\sigma = \tau_1 \tau_2^2 \in S_4$, כאשר $\tau_1 = (2\ 3\ 4)$ ו-$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

שאלה 4. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ויהי מחזור $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S_n$. הוכיחו כי

$$\sigma a \sigma^{-1} = \sigma\,(a_1, a_2, \ldots, a_k)\,\sigma^{-1} = (\sigma\,(a_1)\,, \sigma\,(a_2)\,, \ldots, \sigma\,(a_k))$$

למשל, עבור $\sigma = (1\ 2)\,(4\ 5)$ ו-$a = (2\ 3\ 5\ 6)$ נקבל

$$\sigma\,(2\ 3\ 5\ 6)\,\sigma^{-1} = (1\ 3\ 4\ 6)$$

כרשות, האם אתם יכולים למצוא נוסחה עבור $\sigma a \sigma^{-1}$ כאשר a היא תמורה כלשהי?

שאלה 5. נתבונן ב-S_n עבור $n > 2$.

א. הוכיחו שלכל מחזור $\mathrm{id} \neq \tau \in S_n$ קיימת תמורה $\sigma \in S_n$ כך ש-$\sigma\tau \neq \tau\sigma$. רמז: העזרו בשאלה הקודמת.

ב. הוכיחו כי $Z(S_n) = \{\mathrm{id}\}$.

שאלה 6. תהי $\pi = (1, 2, 3, 4)\,(5, 6, 7)\,(8, 9, 10) \in S_{10}$. חשבו את סדר המְרַכֵּז $|C_{S_{10}}(\pi)|$.

שאלות רשות

שאלה 7. כתבו תוכנה שמקבלת כקלט רשימת מספרים המייצגת תמורה, כלומר מקבלת את השורה השנייה בהצגת תמורה כמטריצה בגודל $2 \times n$. התוכנה תחזיר בפלט את התמורה כמכפלת מחזורים זרים. הרחיבו את התוכנה כך שתקבל כמה תמורות, ותחזיר את מכפלתן כמכפלת מחזורים זרים.

שאלה 8. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\operatorname{supp}(\sigma) = \{i \,|\, \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש-σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו-τ הן זרות אם

$$\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau) = \varnothing$$

הוכיחו כי אם שני מחזורים שאינם זרים מתחלפים זה עם זה, אז כל אחד מהם הוא חזקה של השני.

שאלה 9. תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם

$$|\operatorname{supp}(\sigma) \cap \operatorname{supp}(\tau)| = 1$$

אז $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3.
רמז: הראו כי $\operatorname{supp}(\sigma^{-1}) = \operatorname{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.

שאלה 10. תהי G חבורה. נגדיר את המעריך של החבורה $\exp(G)$ (או האקספוננט) להיות המספר הטבעי הקטן ביותר n כך שלכל $g \in G$ מתקיים $g^n = e$. אם לא קיים כזה, נאמר $\exp(G) = \infty$.
כתבו תוכנה המחשבת את כל הסדרים האפשריים ב-S_n ואת $\exp(S_n)$. זה בסדר להשתמש במערכות תוכנה מתמטיות כמו SageMath.