אינפי II תימנוסליים - תרגול II

תזכורת

<u>משפט</u> - יחידות הצגה של פו' כספים נגזרותיה

נניח ש- $f^{(n)}(0)$ קיימת. אזי קיימת הצגה יחידה $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + r_n(x)$

כך ש- $\frac{r_n(x)}{x^n} \longrightarrow 0$ כאשר $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ($r_n(x)$ קטן מסדר $o(x^n)$)

<u>הגדרה</u> - טור טיילור ומקלורין

עבור הפו' $f(x)$ הגזירה אינסוף פעמים, נגדיר את טור טיילור שלה סביב הנק' x_0:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

עבור $x_0=0$ הטור יקרא טור מקלורין של f

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

<u>טורי מקלורין בסיסיים:</u>

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

משפט (טיילור לגרנז')

תהי $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים. אזי מתקיים:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

כאשר c הוא נק' בין x_0 ל- x. $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ נקרא

שארית לגרנז' מסדר n.

— סוף תזכורת —

תרגיל - ממבחן של ד"ר אלגב שינר

חשבו את $\sqrt[4]{18}$ בדיוק של 10^{-3}

נגדיר $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ונפתח לפי טיילור סביב $x=16$. נרצה למצוא

$n \in \mathbb{N}$ עבורו $|r_n(18)| < 10^{-3}$:

$$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$$

$n=1$: $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$

$$\Rightarrow |R_0(18)| = \left| \frac{f'(c)}{1!} \cdot 2^1 \right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{c^{\frac{3}{4}}} \cdot 2 \underset{16 \le c \le 18}{\le} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^3} \cdot 2 = \frac{1}{16} > 10^{-3}$$

$n=2$: $f''(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot x^{-\frac{7}{4}}$

$$\Rightarrow |R_1(18)| = \left| \frac{f''(c)}{2!} \cdot 2^2 \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{c^7}} \cdot 4 \underset{16 \le c \le 18}{\le} \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} > 10^{-3}$$

$\underline{n=3}$: $f'''(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot x^{-\frac{11}{4}}$

$$\Rightarrow |R_2(18)| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}\cdot 2^3\right| = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{c^{11}}}\cdot 8 \underset{16\le c\le 18}{\le}$$

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{21}{64}\cdot\frac{1}{2^{\cancel{11}\,8}}\cdot\cancel{2^3} = \frac{7}{2^{16}} < \frac{8=2^3}{2^{16}} = \frac{1}{2^{13}} < 10^{-3}$$

ולכן נבחר פולי' טיילור מסדר 2 , כלומר

$$\sqrt[4]{18} \approx 2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot 2 - \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{2!}\cdot 2^2$$

אינטגרל לא מסוים

הגדרות

(I) **קטע מוכלל**: קבוצה מהצורה (a,b) כאשר $-\infty \le a < b \le \infty$ וכן קטעים עם קצה אחד או שניים סגורים, כאשר, הקצוות הם מספרים ממשיים (ולא $\pm\infty$)

(II) g היא **פו' קדומה** של f בקטע מוכלל אם $g'(x)=f(x)$ לכל x בקטע

הערה

אם g פו' קדומה של f בקטע מוכלל, אזי לכל קבוע c גם $g+c$ פו' קדומה של f.

ובכיוון ההפוך: כל שתי פו' קדומות לאותה פו' בקטע מוכלל הפרשן קבוע (הקבוע תלוי בפו' הנתונה)

הגדרה אינטגרל לא מסוים

האינטגרל הלא מסוים $\int f(x)dx$ הוא קבוצת כל הפו' הקדומות של $f(x)$ (אם יש כאלה)

הערה: קיצור, אפשר לבחור פו' קדומה אחת g ולכתוב $\int f(x)dx = g(x)+c$, כאשר c הוא מס' ממשי קבוע שרירותי.

אינטגרלים מיידיים

i) $\int 0\,dx = c$

ii) $\alpha \neq -1$, $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

iii) (במקרה $\alpha = -1$) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

iv) $\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$

v) $a>0$, $\int a^{x}\,dx = \frac{1}{\ln a}\cdot a^{x} + c$

vi) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

vii) $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

viii) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + c$

ix) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

x) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccot} x + c$

שיטות אינטגרציה

משפט - לינאריות האינטגרל

$$\int \alpha f + \beta g\,dx = \alpha \int f\,dx + \beta \int g\,dx + c$$

שיטת ההצבה (נובע מכלל השרשרת : $\left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)\right)$

נניח שנתון $\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx$

I) נסמן $g(x) = t \Leftarrow g(x)dx = dt$

II) נחליף את g ב-t נקבל אינטגרל ונפתור לפי t :

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t)+c = F(g(x))+c$$

תרגיל

חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx \qquad \text{I}$$

נשים ♥ כי: $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

$$\begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\,dx \overset{\uparrow}{=} \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$$

$$\int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx \qquad \text{II}$$

שוב נשים ♥ כי: $\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{x^2+1}$

$$\begin{bmatrix} t = \arctan x \\ dt = \frac{1}{x^2+1}dx \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx \overset{\uparrow}{=} \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx \qquad \text{III}$$

$$\begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx \overset{\uparrow}{=} \int \cos(t)\,dt = \sin(t) + C = \sin(\ln x) + C$$

$$\int \frac{1}{e^x-1}\,dx \qquad \text{IV} \text{ (מאתגר)}$$

$$\int \frac{1}{e^x-1}\,dx = \int \frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{1}{e^x-1}\,dx = \int \frac{e^x}{((e^x-1)+1)(e^x-1)}\,dx \underset{\downarrow}{=} \int \frac{1}{(t+1)t}\,dt =$$

$$\begin{bmatrix} t = e^x-1 \\ dt = e^x dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{t+1-t}{(t+1)\cdot t}\,dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C =$$

$$= \ln(|e^x-1|) - \ln(|\underset{e^x}{\underbrace{t+1}}|) \ldots = \ln(|e^x-1|) - \ln(|e^x|) + C = \ln(|e^x-1|) - x + C$$

אינטגרציה בחלקים

יהיו פו' גזירות u, v שמקיימים $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

(נובע מגזירת מכפלת פו' $(uv)' = u'v - v'u$

בניסוח חלופי:

משפט

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)\,v(x)\,dx$$

תרגיל

חשבו את האינטגרלים הבאים:

I. $\int x \ln x \, dx$

נסמן:

$u(x) = \ln x \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}$

$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad v'(x) = x$

לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int x \ln x\,dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

$$\int e^x \cos(2x)\,dx \qquad \text{I}$$

$u(x) = \cos(2x) \qquad v(x) = e^x$

$u'(x) = -2\sin(2x) \qquad v'(x) = e^x$

לפי אינטגרציה בחלקים:

$$\int e^x \cos 2x\,dx = e^x\cos(2x) - \int -2\sin(2x)\cdot e^x\,dx =$$

$$= e^x\cos(2x) + 2\int \sin 2x \cdot e^x\,dx$$

נחשב את $\int \sin 2x\, e^x\,dx$ לפי אינטגרציה בחלקים (שוב):

$\tilde{u}(x) = \sin(2x) \qquad \tilde{v}(x) = e^x$

$\tilde{u}'(x) = 2\cos(2x) \qquad \tilde{v}'(x) = e^x$

$$\Rightarrow \int \sin(2x)e^x\,dx = e^x\sin(2x) - \int 2\cos(2x)\cdot e^x\,dx = e^x\sin(2x) - 2\int\cos(2x)e^x\,dx$$

$$\Rightarrow \int\cos(2x)e^x\,dx = e^x\cos(2x) + 2\cdot\left(e^x\sin(2x) - 2\int\cos(2x)e^x\,dx\right) =$$

$$= e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x) - 4\int\cos(2x)e^x\,dx$$

$$\Rightarrow 5\cdot\int\cos(2x)e^x\,dx = e^x\cos(2x) + 2e^x\sin 2x + c$$

$$\Rightarrow \int\cos(2x)e^x\,dx = \frac{1}{5}\left(e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x)\right) + c'$$

$$c' = \frac{1}{5}c$$

(תרגיל נוסף) $\int x^2\cos(7x)\,dx$ (III)

$u(x) = x^2 \qquad v(x) = \frac{1}{7}\sin(7x)$

$u'(x) = 2x \qquad v'(x) = \cos(7x)$

בחלקים

$$\Rightarrow \int x^2\cos(7x)\,dx = \frac{x^2}{7}\sin(7x) - \frac{2}{7}\int x\sin(7x)\,dx =$$

בחלקים

$\tilde{u}(x) = x \qquad \tilde{v}(x) = -\frac{1}{7}\cos(7x)$

$\tilde{u}'(x) = 1 \qquad \tilde{v}'(x) = \sin(7x)$

$$= \frac{x^2}{7}\sin(7x) - \frac{2}{7}\left(-\frac{x}{7}\cos(7x) + \frac{1}{7}\int\cos(7x)\,dx\right) =$$

$$= \frac{2x^2}{7}\sin(7x) + \frac{2x}{49}\cos(7x) - \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{49}\sin(7x) + C$$

(תרגיל נוסף) $\int \sin(\sqrt{x})\,dx$ (IV)

נציב:

$t = \sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\Rightarrow \int \sin(\sqrt{x})\,dx = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\sin(\sqrt{x})\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})\right)dx =$$

$$= \int 2t\sin t\,dt = \ldots$$

בחלקים

$u(t) = 2t \qquad v(t) = -\cos t$

$u'(t) = 2 \qquad v'(t) = \sin t$

$$m\in\mathbb{N},\quad I_m(x)=\int\frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx$$ V

עבור $m=1$ כבר ראינו בהר״צ. $\left(\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x+C\right)$

נניח $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx=\int 1\cdot\frac{1}{(1+x^2)^m}\,dx$$

נגדיר:

$$u(x)=\frac{1}{(1+x^2)^m}\qquad v(x)=x$$

$$u'(x)=\frac{-2m\,x(1+x^2)^{m-1}}{(1+x^2)^{2m}}=\frac{-2mx}{(1+x^2)^{m+1}}\qquad v'(x)=1$$

נשתמש מהלך חלקים!

$$I_m=\frac{x}{(1+x^2)^m}+\int\frac{2mx\cdot x}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx=\frac{x}{(1+x^2)^m}+2m\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx=$$

$$\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx=\int\frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx=\int\frac{x^2+1}{(x^2+1)^{m+1}}-\frac{1}{(1+x^2)^{m+1}}\,dx=\int\frac{\cancel{x^2+1}}{(x^2+1)^{m+1}}\,dx-\int\frac{1}{(x^2+1)^{m+1}}\,dx$$

$$=I_m(x)-I_{m+1}(x)$$

$$\Rightarrow\quad I_m(x)=\frac{x}{(1+x^2)^m}+2m\left(I_m(x)-I_{m+1}(x)\right)=\frac{x}{(1+x^2)^m}+2m\,I_m(x)-2m\,I_{m+1}(x)$$

$$\Rightarrow\quad I_{m+1}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2m}\left((1-2m)\,I_m(x)-\frac{x}{(1+x^2)^m}\right) & m>1\\[1ex] \arctan x+c & m=1\end{cases}$$