תזכורת

יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי כך ש - $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T ניתן ללכסון אם ורק אם לכל ערך עצמי λ של T, מתקיים: $m_\lambda = k_\lambda$.

תזכורת

יהי $T: V \to V$ אופרטור נורמלי כך ש - $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי T **ניתן ללכסון אוניטרי**, ז"א, קיים בסיס אורתונורמלי B של V, כך ש - $A = [T]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

לכסון אוניטרי למטריצות

תהי A מטריצה נורמלית כך ש - $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, אזי A **ניתנת ללכסון אוניטרי** ז"א, קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש - $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ מטריצה אלכסונית.

הוכחה

נגדיר אופרטור $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ ע"י $T(x) = A \cdot x$.

אם B בסיס עבור $\mathbb{F}^n$, אזי: $[T]_B = A$.

נבחר בסיס אורתונורמלי B. T נורמלי, שכן A נורמלית.

לכן, T ניתן ללכסון אוניטרי, ז"א, קיים בסיס אורתונורמלי $\tilde{B}$ כך ש - $\tilde{A} = [T]_{\tilde{B}}$ מטריצה אלכסונית.

$\tilde{A} = P^{-1} \cdot A \cdot P$, כש – P מטריצת המעבר מ - B ל - $\tilde{B}$. משום ש - $B, \tilde{B}$ בסיסים אורתונורמליים, P היא מטריצה אוניטרית.

■

הערה

אם T ניתן ללכסון אוניטרי, אז $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים ו – T אופרטור נורמלי.

הוכחה

T ניתן ללכסון אוניטרי, לכן בפרט T ניתן לשילוש, לכן $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

T ניתן ללכסון אוניטרי, לכן קיים בסיס אורתונורמלי $\tilde{B}$ כך ש - $A = [T]_{\tilde{B}}$ מטריצה אלכסונית.

אזי, גם $\tilde{A}^* = \bar{\tilde{A}}$ מטריצה אלכסונית.

כל שתי מטריצות אלכסוניות מתחלפות, ז״א, $\tilde{A}$ מטריצה נורמלית, לכן, משום ש - $\tilde{B}$ בסיס אורתונורמלי, T אופרטור נורמלי.

■

בלשון מטריצות

מטריצה A ניתנת ללכסון אוניטרי אם ורק אם $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים ו – A מטריצה נורמלית.

הוכחה

A ניתנת ללכסון אוניטרי, לכן בפרט A ניתנת לשילוש, ואז $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

A ניתנת ללכסון אוניטרי, לכן קיימת מטריצה אוניטרית P כך ש - $P^* \cdot A \cdot P$ משולשת עליונה, כלומר:

$$\tilde{A} = P^* \cdot A \cdot P = D$$

P אוניטרית, לכן:

$$P \cdot P^* = P^* \cdot P = I$$

עפ״י הגדרת מטריצה הפיכה:

$$P^* = P^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{A} = P^{-1} \cdot A \cdot P = D$$

כעת, מתקיים:

$$D = P^* \cdot A \cdot P$$

וכן:

$$D^* = \overline{D^t} = \overline{D}$$

נחשב:

$$D^* = (P^* \cdot A \cdot P)^*$$

עפ״י תכונות מטריצה משוחלפת ומטריצה צמודה:

$$D^* = P^* \cdot A^* \cdot (P^*)^*$$

$$D^* = P^* \cdot A^* \cdot P$$

D מטריצה אלכסונית וכן $D^* = \overline{D}$, לכן:

$$D \cdot D^* = D^* \cdot D$$

$$\Downarrow$$

$$P^* \cdot A \cdot \overbrace{P \cdot P^*}^{=I} \cdot A^* \cdot P = P^* \cdot A^* \cdot \overbrace{P \cdot P^*}^{=I} \cdot A \cdot P$$

$$P^* \cdot A \cdot A^* \cdot P = P^* \cdot A^* \cdot A \cdot P$$

נכפיל ב – P משמאל ונכפיל ב - P^* מימין:

$$\overbrace{P \cdot P^*}^{=I} \cdot A \cdot \ A^* \cdot \overbrace{P \cdot P^*}^{=I} = \overbrace{P \cdot P^*}^{=I} \cdot A^* \cdot \ A \cdot \overbrace{P \cdot P^*}^{=I}$$

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A$$

לכן, A נורמלית.

$$\blacksquare$$

הערה

אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, אזי התנאי $p_T(x)$ מתפרק לגורמים ליניאריים הוא ריק, ז״א, הוא מתקיים לכל אופרטור T (ולכל פולינום).

נתבונן במקרה $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

משפט

יהי $T: V \to V$ אופרטור <u>צמוד לעצמו</u>. אזי T **ניתן ללכסון אורתוגונלי**, ז״א, קיים בסיס <u>אורתונורמלי</u> B עבור V כך ש - $A = [T]_B$ מטריצה <u>אלכסונית</u>.

הוכחה

נתבונן ב - $p_T(x)$. אם נתבונן ב - $p_T(x)$ בתור פולינום מרוכב, אז כמו כל פולינום מרוכב (עפ״י המשפט היסודי של האלגברה) הוא מתפרק לגורמים ליניאריים.

$p_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_n)$. כל λ_i הוא ערך עצמי של $p_T(x)$, לכן, כל λ_i הוא ממשי (עפ״י משפט מהרצאה 22). לכן, $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{R}$, ומשום ש T – נורמלי, נקבל את התוצאה ממשפט על לכסון אוניטרי.

■

משפט

תהי A מטריצה סימטרית ממשית. אזי, A **ניתנת ללכסון אורתוגונלי**, ז״א, קיימת מטריצה אורתוגונלית P כך ש - $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ מטריצה אלכסונית.

הוכחה

תרגיל!

משפט

אם A ניתנת ללכסון אורתוגונלי, אזי A מטריצה סימטרית.

הוכחה

$$P \cdot P^* = P^* \cdot P = I$$

$$P^t = \overline{P^t} = P^* = P^{-1}$$

$$D = P^t \cdot A \cdot P$$

$$D^t = (P^t \cdot A \cdot P)^t$$

$$D^t = P^t \cdot A^t \cdot (P^t)^t$$

$$D^t = P^t \cdot A^t \cdot P$$

מתקיים:

$$D^t = D$$

לכן:

$$P^t \cdot A^t \cdot P = P^t \cdot A \cdot P$$

$$\overbrace{P \cdot P^t}^{=I} \cdot A^t \cdot \overbrace{P \cdot P^t}^{=I} = \overbrace{P \cdot P^t}^{=I} \cdot A \cdot \overbrace{P \cdot P^t}^{=I}$$

$$A^t = A$$

לכן, A סימטרית.

■

הערה

נניח ש A – מטריצה ממשית כך ש- $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. אזי: A נורמלית אם ורק אם A סימטרית.

הוכחה

אם A סימטרית אז A בפרט נורמלית.

אם A נורמלית, אז משום ש - $p_A(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים, A ניתנת ללכסון אורתוגונלי, ולכן, לפי הערה הקודמת – A סימטרית.

■

הערה

ללא ההנחה על $p_A(x)$, הטענה הקודמת אינה מתקיימת, כלומר, קיימות דוגמאות של מטריצות ממשיות נורמליות שאינן סימטריות.

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

נבדוק האם A סימטרית:

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

מכאן, A אינה סימטרית (וכן A אנטי – סימטרית).

נבדוק האם A נורמלית:

$$I = \begin{cases} A \cdot A^t = A \cdot (-A) = -A^2 \\ A^t \cdot A = (-A) \cdot A = -A^2 \end{cases}$$

מכאן, A נורמלית.

לכן: A נורמלית, אך אינה סימטרית.

■

משפט (פירוק ספקטרלי)

יהי $T: V \to V$ אופרטור <u>נורמלי</u>. נניח ש - $p_T(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים.

יהיו $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ ערכים עצמיים שונים של T. נסמן $V_i = V_{\lambda_i}$ המרחב העצמי של T המתאים לערך העצמי λ_i.

אזי: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_s$, ובנוסף $V_i \perp V_j$ לכל $1 \leq i \neq j \leq s$.

הוכחה

הפירוק לסכום ישר נובע מהלכסון של T.

$V_i \perp V_j$: ניקח $v_i \in V_i, v_j \in V_j$. משום ש - $\lambda_i \neq \lambda_j$, נקבל (לפי משפט מהרצאה 22): $v_i \perp v_j$.

■