אי שוויונות

אי שוויון מרקוב

אי שוויון מרקוב: יהי $X \geq 0$ משתנה מקרי חיובי. נסמן $\mu = E(X)$. לכל α, $P(X \geq \alpha \cdot \mu) \leq \frac{1}{\alpha}$

הוכחה

נניח שיש ל $X -$ פונקציית צפיפות f_X (תרגיל: להוכיח כאשר X משתנה מקרי בדיד).

$$E(X) = \int_0^\infty f_X(t) \cdot tdt = \int_0^{\alpha\cdot\mu} f_X(t) \cdot tdt + \int_{\alpha\cdot\mu}^\infty f_X(t) \cdot tdt \geq$$

$$\geq \int_{\alpha\cdot\mu}^\infty f_X(t) \cdot \alpha \cdot \mu \, dt = \alpha \cdot \mu \cdot P(x > \alpha \cdot \mu)$$

$\square$

אי שוויון צ׳ביצ׳ב ($Chebyshev$)

אי שוויון צ׳ביצ׳ב: יהי X משתנה מקרי, עם $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = V(X)$ אזי

$$P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

הוכחה

נתבונן במשתנה המקרי $Y = (X - \mu)^2$.

$$E(Y) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = V(X) = \sigma^2$$

לפי אי שוויון מרקוב,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) = P(|X - \mu|^2 \geq k^2\sigma^2) = P(Y \geq k^2\sigma^2) \leq \frac{1}{k^2}$$

$\square$

מומנטים

יהי X משתנה מקרי.

"המומנט ה $- n -$ י של X" $E(X^n)$.

נניח שיש ל $X -$ פונקציית צפיפות, אזי

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^\infty f_X(t) t^n \, dt$$

בתנאי שהאינטגרל מתכנס בהחלט.

טענה

אם למשתנה מקרי יש מומנט n – י, אז יש לו מומנטים מכל סדר נמוך יותר.

דוגמה

״התפלגות קושי״: X משתנה מקרי עם פונקציית צפיפות $f_X(t)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{t^2+1}$ עבור $t\geq 0$.

$$E(X)=\frac{2}{\pi}\cdot\int_0^\infty \frac{x}{x^2+1}dx=\infty$$

הוכחה (לטענה)

מתי קיים המומנט ה – k- י?

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^k dx=\int_{-\infty}^{-1} f(x)x^k\,dx+\int_{-1}^{1} f(x)x^k\,dx+\int_{1}^{\infty} f(x)x^k\,dx$$

$\int_{-1}^{1} f(x)x^k\,dx$ תמיד מתכנס:

$$\int_{-1}^{1}|f(x)x^k|dx\leq\int_{-1}^{1} f(x)dx\leq 1$$

בזנב הימני:

$$\int_{1}^{\infty} f(x)x^k dx\leq_{\text{כי } k\leq n}\int_{1}^{\infty} f(x)x^n dx<_{\text{לפי ההנחה}}\infty$$

□

פונקציה יוצרת מומנטים

יהי X משתנה מקרי. נגדיר $M_x(t)=E(e^{tX})$ – הפונקציה יוצרת המומנטים של X.

כידוע,

$$e^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n x^n}{n!}$$

לכן:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}E(X^n)\cdot\frac{t^n}{n!}$$

כלומר, אפשר לקרוא את המומנטים מהמקדמים של טור טיילור של הפונקציה $M_X(t)$.

דוגמה

נתבונן ב – $Z\sim N(0,1)$.

$$M_Z(t)=E(e^{tZ})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}e^{tx}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{t^2}{4}}e^{-\frac{(t-x)^2}{2}}dx=$$

$$=e^{\frac{t^2}{2}}\cdot(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}dx=e^{\frac{t^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{t^2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

מסקנה

$Z\sim N(0,1)$:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{E(Z^m)t^m}{m!}=_{\text{נכון תמיד}}M_Z(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!}$$

$$\Rightarrow E(Z^{2n+1})=0;E(Z^{2n})=\frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$E(Z^2)=\frac{2!}{2^1\cdot 1!}=1$$

$$E(Z^4)=\frac{4!}{2^2\cdot 2!}=3$$

$$E(Z^6)=\frac{6!}{2^3\cdot 3!}=15$$

$$E(Z^{2n})=\frac{(2n)!}{2^n n!}=(2n)!!:=\prod_{i=1}^{n}(2i-1)$$

(משמעות קומבינטוריות: מכפלה זו שווה למספר הדרכים שניתן לחלק $2n$ עצמים לזוגות)

הערה על פונקציה יוצרת מומנטים

$$M_X(t)=E(e^{tX})\Rightarrow M_X(0)=1$$

$$M_X'(t)=E(X\cdot e^{tX})\Rightarrow M_X'(0)=E(X)$$

$$M_X''(t)=E(X^2\cdot e^{tX})\Rightarrow M_X''(0)=E(X^2)$$

$$\vdots$$

$$M_X^{(n)}(t)=E(X^n\cdot e^{tX})\Rightarrow M_X^{(n)}(0)=E(X^n)$$

הערה

נניח שנתונה הפי״מ (הפונקציה יוצרת מומנטים) $M_X(t)$ של X.

$$M_{\alpha X}(t) = E(e^{t\cdot\alpha X}) = M_X(\alpha t)$$

$$M_{\beta+X}(t) = E\left(e^{t(\beta+X)}\right) = E\left(e^{t\beta}\cdot e^{tX}\right) = e^{t\beta}\cdot M_X(t)$$

נניח ש - X, Y בלתי תלויים. $M_X(t)\cdot M_Y(t) = E(e^{tX})E(e^{tY})$

משפט

תהי F התפלגות כלשהי. נניח שאם $X, Y\sim F$ בלתי תלויים, אז $X+Y, X-Y$ בלתי תלויים.
אזי, ההתפלגות נורמלית.

הוכחה

(אנו מניחים שהפונקציה יוצרת המומנטים M של X, Y רציפה).

$$M\left((\alpha+\beta)t\right)\cdot M\left((\alpha-\beta)t\right) = M_{(\alpha+\beta)X+(\alpha-\beta)Y}(t) =$$
$$= M_{\alpha(X+Y)+\beta(X-Y)}(t) = M_{\alpha(X+Y)}(t)\cdot M_{\beta(X-Y)}(t) =$$
$$= M_{X+Y}(\alpha t)\cdot M_{X-Y}(\beta t) = M(\alpha t)\cdot M(\alpha t)\cdot M(\beta t)\cdot M(\beta t)$$

נציב $t = 1$:

$$M(\alpha+\beta)M(\alpha-\beta) = M(\alpha)^2 M(\beta\cdot M(-\beta)$$

נציב $L(t) = \log M(t)$:

$$L(\alpha+\beta) + L(\alpha-\beta) = 2L(\alpha) + L(\beta) + L(-\beta)$$

$$L(-\alpha-\beta) + L(-\alpha+\beta) = 2L(-\alpha) + L(\beta) + L(-\beta)$$

נסמן: $A(t) = L(t) - L(-t)$:

$$A(\alpha+\beta) + A(\alpha-\beta) = 2A(\alpha)$$

נציב $\alpha = n\beta$:

$$A\left((n+1)\beta\right) + A\left((n-1)\beta\right) = 2A(n\beta)$$

שימו לב ש - $A(0) = 0$ כי $M(0) = 1$

$A(0) = 0$ באינדוקציה,

$$A(2\beta) = 2A(\beta)$$
$$A(3\beta) = 3A(\beta)$$
$$\vdots$$
$$A(n\beta) = n\cdot A(\beta)$$

נציב $\beta = \frac{X}{m}$ (m שלם):

$$A(X) = A\left(m \cdot \frac{X}{m}\right) = m \cdot A\left(\frac{X}{m}\right)$$
$$\Rightarrow A\left(\frac{X}{m}\right) = \frac{1}{m} A(X)$$

$\Leftarrow$ לכל $q \in \mathbb{Q}$,

$\Leftarrow A(qX) = q \cdot A(X)$

$$\forall q \in \mathbb{Q}$$
$$A(q) = q \cdot A(1) \Rightarrow_{\text{רציפות}} A(X) = c \cdot X$$

באותה דרך, אפשר לקבל $L(X) = k \cdot X^2 + cX$.

$$\Rightarrow M_X(X) = e^{kX^2+cX}$$

<u>הערה:</u>

ל- $Z \sim N(0,1)$ יש $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ לכן לכל $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$M_X(t) = M_{\mu+\sigma Z}(t) = e^{t\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$