תזכורת

$E(X^n)$ המומנט ה $-n-$ י, $E(X) \coloneqq \mu$, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$.

אזי $E((X-\mu)^n)$ הוא המומנט המרכזי ה $-n-$ י.

$E((X-\mu)^2) = \sigma^2$ השונות.

$\frac{E((X-\mu)^3)}{\sigma^3}$ הצידוד של X.

$\frac{E((X-\mu)^4)}{\sigma^4} - 3$ ה"גבנוניות". מכויל כך שהגבנוניות של התפלגות נורמלית היא 0.

הגדרה ם

$$M_X(t) = E_X(e^{tX})$$

משפט

אם $M_X(t)$ קיימת בקטע סביב 0, אז היא אנליטית (כלומר ניתנת לפיתוח לטור טיילור); כל המומנטים קיימים, ו - $M_X(t) = \sum(\frac{E(X^n)}{n!} \cdot t^n) \Leftrightarrow M_X^{(n)}(0) = E(X^n)$.

דוגמה

$$Z \sim N(0,1)$$
$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \cdots$$

תזכורת

$X, Y \sim ?$ בלתי תלויים. נניח $X+Y, X-Y$ בלתי תלויים.

$\Leftarrow$ משוואה פונקציונלית על $M(\cdot)$ $\Leftarrow$ $M(\cdot) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$ כמו ההתפלגות הנורמלית

$\Leftarrow X, Y \sim N(\cdot, \cdot)$

סימון

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots X_n}{n}$$

החוק החלש של המספרים הגדולים

יהיו X_n משתנים מקריים בלתי מתואמים, עם תוחלת $E(X_n) = \mu$, $V(X_n) = \sigma^2$,

אז לכל $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) = 0$$

הוכחה

$$E(\overline{X_n}) = \left(\frac{\mu + \cdots + \mu}{n}\right) = \mu$$

$$V(\overline{X_n}) = V\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \cdot V(X_1 + \cdots X_n) =$$

$$= \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \cdots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}$$

נחשב לפי אי שוויון צ'מיצב ($P(|X-\mu| \geq k \cdot \sigma) \leq \frac{1}{k^2}$):

$$P(|\overline{X_n} - \mu| \geq \varepsilon) = P(|\overline{X_n} - \mu| \geq \frac{\varepsilon \cdot \sqrt{n}}{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n} = 0$$

$\square$

הגדרה

נניח ש – Y_n סדרת משתנים מקריים.

נגיד ש – $\alpha \xrightarrow[]{\substack{a.s \\ a.e \\ \text{בהסתברות } 1}} Y_n$ (כמעט תמיד) אם $P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = \alpha\right) = 1$

הסבר

הגבול $\lim_{n\to\infty} Y_n = \alpha$ הוא:

$$\forall \varepsilon > 0:\ \exists N: \forall n > N: |Y_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$\forall k: \exists N: \forall n > N: \underbrace{|Y_n - \alpha| < \frac{1}{k}}_{\text{מאורע}}$$

$$\forall k: \exists N : \bigcap_{n>N} \left\{\omega: |Y_n - \alpha| < \frac{1}{k}\right\}$$

$$\forall k: \bigcup_{N} \bigcap_{n>N} \left\{\omega: |Y_n - \alpha| < \frac{1}{k}\right\}$$

$$\bigcap_{k} \bigcup_{N} \bigcap_{n>N} \left\{\omega: |Y_n - \alpha| < \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{F}$$

דוגמה

$Y_n \sim b\left(\frac{1}{2}\right)$ אזי $\frac{1}{n}Y_n \xrightarrow{a.e} 0$. לכל n:

$$0 \leftarrow 0 \leq \frac{1}{n}Y_n \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ' $\frac{1}{n}Y_n \rightarrow 0$.

□

הגדרה

$Y_n \xrightarrow{a.e} \alpha$ כמעט תמיד	**(החזק)** $P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = \alpha\right) = 1$
$Y_n \xrightarrow{P} \alpha$ "מתכנסת בהסתברות"	**(החלש)** $\forall \varepsilon: \lim_{n\to\infty} P(\|Y_n - \alpha\| \leq \varepsilon) = 1$
$Y_n \xrightarrow{D} Y$ בהתפלגות	$\forall a: \lim_{n\to\infty} P(Y_n < a) = P(Y < a)$

החוק החזק של המספרים הגדולים

יהיו X_n משתנים מקריים שווי התפלגות ובלתי תלויים, עם תוחלת μ ושונות סופית.
אזי,

$$\overline{X_n} \xrightarrow{a.s} \mu$$

לא נוכיח את המשפט.

טענה

אם $Y_n \xrightarrow{a.s} \alpha$ אזי גם $Y_n \xrightarrow{P} \alpha$

הוכחה

יהי $\varepsilon_0 > 0$. נסמן $A_n = \{|Y_n - \alpha| < \varepsilon_0\}$
נתון ש $P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = \alpha\right) = 1$, כלומר:

$$1 = P\left(\lim_{n\to\infty} Y_n = \alpha\right) = P\left(\bigcap_{\varepsilon} \underbrace{\bigcup_{N} \bigcap_{n>N} A_n(\varepsilon)}_{\text{מתכווץ כשר } \varepsilon \text{ קטן}}\right) \leq P\left(\bigcup_{N} \underbrace{\bigcap_{n>N} A_n(\varepsilon_0)}_{\text{שרשרת עולה של מאורעות}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\underbrace{\bigcap_{n>N} A_n(\varepsilon_0)}_{\substack{B_n \\ B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots}}\right) \Rightarrow \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} P(A_n(\varepsilon_0)) = 1}$$

דוגמה

$Y_n \sim b\left(\frac{1}{n}\right)$ בלתי תלויים. ($\sum Y_n = \infty$)

נוכיח ש - $Y_n \xrightarrow{P} 0$ אבל לא מתקיים $Y_n \xrightarrow{a.s} 0$. יהי $\varepsilon > 0$. צריך להוכיח ש -

$$P(|Y_n - 0| \leq \varepsilon) = P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n} \to 1$$

כדי ש - $Y_n \xrightarrow{a.s} 0$ צריך שהסדרה תתכנס בסיכוי 1. נוכיח שהסיכוי שהסדרה מתכנסת ל – 0 הוא 0 (ולא 1).

$$Y_n \to 0 \Leftrightarrow \exists N: \forall n > N: Y_n = 0$$

$$P(\exists N: \forall n > N: Y_n = 0) = P\left(\bigcup_N \underbrace{\bigcap_{n>N} \{Y_n = 0\}}_{=B_n}\right) = B_n = \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{N\to\infty} 0 = 0$$

□