שיעור 6 - אלגברה ליניארית 1

חזרה קצרה :

V מ"ו. $U \subseteq V$ ת"מ אם הוא מרחב וקטורי בעצמו מעל אותו שדה וביחס לאותן פעולות.

קריטריון מקוצר לבדיקת תת מרחב :

1. $0_V \in U$
2. לכל $U \; \alpha \in \mathbb{F}, u, v \in U$ $\alpha u + v \in U$ (סגירות לחיבור וקטורים וכפל בסקלר)

בהינתן $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים של V.

$$U \cap W = \{v \in V | v \in U \wedge v \in W\}$$

זה תת המרחב הכי גדול שמוכל בU, W.

$$U + W = \{u + w | u \in U \wedge w \in W\}$$

זה תת המרחב הכי קטן שמכיל את U, W.

$$\{0_V\} \subseteq U \cap W \subseteq U, W \subseteq U + W \subseteq V$$

סכום ישר

$U \oplus W = V$ אם מתקיימים 2 תנאים :

1. $U \cap W = \{0_V\}$
2. $U + W = V$

לדוגמא :

$$V = \mathbb{R}^2, U = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}, W = \{(0, y) \,| y \in \mathbb{R}\}$$

נראה ש$U \oplus W = V = \mathbb{R}^2$:

1. יהי $v \in U \cap W$:

$$v \in U \wedge v \in W$$

$$\exists x, y \in \mathbb{R} : (x, 0) = (0, y) = v$$

$$x = y = 0$$

$$v = (0, 0)$$

סה"כ קיבלנו שבהכרח $U \cap W = \{(0, 0)\}$

.2

$\subseteq$

ידוע כי U, W תתי מרחבים של V, ולכן לכל $u \in U$ ו $w \in W$ מתקיים $u, w \in V$

יהי $v \in U + W$. אז קיימים $u \in U$ ו $w \in W$ כך ש $v = \underbrace{u}_{\in V} + \underbrace{w}_{\in V} \in V$ ולכן $U + W \subseteq V$.

$\supseteq$

יהי $V = \mathbb{R}^2 \ni v$ צ"ל : קיימים $u \in U, w \in W$ כך ש $v = u + w$(כי אז $v \in U + W$)

בגלל ש $V = \mathbb{R}^2 \ni v$ קיימים $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש $v = (x, y)$.

$$(x, y) = \underbrace{(x, 0)}_{\in U} + \underbrace{(0, y)}_{\in W} \in U + W$$

לכן, הוכחנו שכל $v \in V$ מתקיים ש $v \in U + W$ ולכן יש הכלה דו כיוונית ומתקיים

$$U + W = V$$

סה"כ $U \oplus W = V$.

תרגיל

יהיו $V = \mathbb{R}^n$. W_1, W_2 שני תתי מרחבים המוגדרים כך :

$$W_1 = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n | a_1 = a_2 = ... = a_n\}$$

$$W_2 = \{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n | a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 0\}$$

הוכיחו כי $W_1 \oplus W_2 = V = \mathbb{R}^n$

1. $W_1 \cap W_2 = \{(0, 0, 0, ..., 0)\}$:

יהי $w \in W_1 \cap W_2$. נוכיח ש $w = (0, ..., 0)$

נסמן $w = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

$$w \in W_1 \wedge w \in W_2$$

$$a_1 = a_2 = ... = a_n \wedge a_1 + a_2 + ... + a_n = 0$$

$$a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1 = 0$$

$$na_1 = 0$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow a_2 = a_3 = ... = a_n = 0$$

$$w = (0, 0, ..., 0)$$

סה"כ אכן קיבלנו ש $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$

2. $W_1 + W_2 = V$:

הכלה מצד אחד היא ברורה כי W_1, W_2 הם תתי מרחבים של V, ולכן גם החיבור שלהם.

נרצה להוכיח שלכל $v \in V$ קיימים $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ כך ש$v = w_1 + w_2$.(וזה אומר ש$v \in W_1 + W_2$)

נניח ש$v = (a_1, ..., a_n)$.

נסמן $\overline{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$ כממוצע של איברי וקטור v.

(למה? זו האינטואיציה :

$$v = (x, y, z)$$

$$\underbrace{(a, a, a)}_{w_1}, \underbrace{(b, c, -b-c)}_{w_2}$$

$$\begin{cases} x = a + b \\ y = a + c \\ z = a - b - c \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 3a \Rightarrow \frac{x + y + z}{3} = a$$

נשים לב שניתן לפרק את v כך :

$$v = (a_1, ..., a_n) = (\overline{a}, \overline{a}, ..., \overline{a}) + (a_1 - \overline{a}, a_2 - \overline{a}, ..., a_n - \overline{a})$$

נוכיח ש$(\overline{a}, \overline{a}, ..., \overline{a}) \in W_1$ ו$(a_1 - \overline{a}, a_2 - \overline{a}, ..., a_n - \overline{a}) \in W_2$

נשים לב שכל רכיבי $(\overline{a}, \overline{a}, ..., \overline{a})$ שווים ולכן הוא אכן שייך לW_1.

$$(a_1 - \overline{a}) + (a_2 - \overline{a}) + ... + (a_n - \overline{a}) = (a_1 + a_2 + ... + a_n) - n\overline{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i - n \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = 0$$

דוגמא :

$$(1, 2, 3) = (2, 2, 2) + (-1, 0, 1)$$

סה"כ הוכחנו שכל $v \in V$ מתקיים ש$v \in W_1 + W_2$ ולכן $V = W_1 + W_2$.

לכן,

$$V = W_1 \oplus W_2$$

משפט :

אם $V = W \oplus U$ אז לכל $v \in V$ קיימים $u \in U, w \in W$ יחידים כך ש$v = w + u$

צירוף ליניארי, קבוצה פורשת תלות ליניארית

יהי V מ"ו. עבור קבוצת וקטורים $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ ו$\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ מתקיים ש

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \in V$$

הוא צירוף ליניארי של איברי $v_1, ..., v_n$.

לדוגמא : $V = \mathbb{R}^2$ ו $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ אז כל $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ עבור $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ הוא צירוף ליניארי של v_1, v_2.

הערה : נשים לב שכל וקטור ב$\mathbb{R}^2$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים האלה כי

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הגדרה :

עבור קבוצה $S = \{v_1, ..., v_n\}$ (יכולה להיות גם אינסופית) מתקיים ש$spanS$ הוא קבוצת הצירופים הליניאריים של איברי S :

$$spanS = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | \ \forall \ i \in \{1, ..., n\} : \alpha_i \in \mathbb{F}, v_i \in S\}$$

כמו שרשמנו מקודם, מתקיים ש

$$sp\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} = \mathbb{R}^2$$

נשים לב לכמה תכונות : $(U, W \leq V)$

1. אם $W \leq V$ ת"מ כך ש$S \subseteq W$ אז $spanS \subseteq W$.
2. $span\emptyset = \{0_V\}$ (מגדירים באופן חיצוני, לא מובן מאליו מהגדרת ה$span$)
3. $U + W = sp\{U \cup W\}$
4. $spanU = U$
5. $A \subseteq B$ אז $spA \subseteq spB$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}, B = \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m\}$$
$$\sum \alpha_i a_i = \sum \alpha_i a_i + 0 \cdot b_i$$

(נשים 0ים במקדמים של איברי B/A ואז נקבל בדיוק את אותם צירופים)

6. $spA+spB=sp(A\cup B)$

נוכיח :

$\subseteq$

יהי $v\in spA+spB$. קיימים $u\in spA,w\in spB$ כך ש$v=u+w$

נשים לב ש

$$u=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ia_i,w=\sum_{i=1}^{m}\beta_ib_i:a_i\in A,b_i\in B$$

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ia_i+\sum_{i=1}^{m}\beta_ib_i=\alpha_1a_1+\alpha_2a_2+...+\alpha_na_n+\beta_1b_1+...+b_mb_m$$

נשים לב שזה צירוף ליניארי של $a_1,...,a_n,b_1,...b_m$ ולכן $v\in spA\cup B$

$\supseteq$ (בצורה דומה/זהה לצד השני)

הגדרה :

קבוצה $S\subseteq V$ נקראת **פורשת** את $U\leq V$ אם $spanS=U$.

(U פורשת את עצמה, נשים לב שאין קבוצה פורשת יחידה)

הגדרה :

צירוף ליניארי טריוויאלי : $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$ ואז $\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=0$.

תלות ליניארית :

קבוצה $S\subseteq V$ תיקרא **תלויה ליניארית** אם קיימים $\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{F}$ ו$v_1,...,v_n\in S$ כך ש

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i=0\wedge\exists i\in\{1,...,n\}:\alpha_i\neq0$$

(קיים צירוף ליניארי לא טריוויאלי שמתאפס)

נשים לב שאם קיים $\alpha_i\neq0$ אז

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+a_iv_i+...+\alpha_nv_n=0$$

$$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+...+\alpha_{i-1}v_{i-1}+\alpha_{i+1}v_{i+1}+...+\alpha_nv_n=-a_iv_i$$

$$v_i=-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}v_1-\frac{\alpha_2}{\alpha_i}v_2+...-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}v_{i-1}-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}v_{i+1}+...-\frac{\alpha_nv_n}{\alpha_i}=-\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\alpha_jv_j}{\alpha_i}$$

ובעצם קיבלנו שv_i הוא צירוף ליניארי של שאר איברי S.

לכן, **קבוצה תלויה ליניארית אם ורק אם קיים** v_i **כך שהוא צירוף ליניארי של שאר איברי** S**.**

קבוצה נקראת **בת"ל** אם היא לא תלויה ליניארית(אם כל צירוף ליניארי שמתאפס הוא כן טריוויאלי).

דוגמא :

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הקבוצה תלויה ליניארית בגלל ש$\binom{1}{1}$ הוא סכום של $\binom{0}{1}+\binom{1}{0}$.

נשים לב ש

$$sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל

נבדוק האם הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ ת"ל או בת"ל(תלויה ליניארית או בלתי תלויה ליניארית)

ניקח צירוף ליניארי כללי שמתאפס :

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

ולכן הקבוצה היא בת"ל(הצירוף היחיד שמתאפס הוא הטריוויאלי).

ניתן להסיק מפה אלגוריתם לבדיקת תלות ליניארית :

נשים את הוקטורים בעמודות של מטריצה. אם למערכת יש פתרון יחיד אז הקבוצה היא בת"ל, אחרת היא ת"ל.