

# שיעור חזרה

מבני נתונים ואלגוריתמים 88-280

תשע"ט סמסטר א'

# תרגיל - זרימה בגרף

מבוסס על תרגיל במבחן תשע"ו מועד א':

*"באוניברסיטה חשובה בעיר סמוכה לתל אביב רוצים להציע מעונות לסטודנטים. כל סטודנט רושם את החדרים בהם הוא מוכן לגור. כיוון שמדובר באוניברסיטה חשובה, האוניברסיטה החליטה לפנק את הסטודנטים וכל חדר מכיל סטודנט בודד. האוניברסיטה רוצה למלא מספר חדרים רב ככל היותר. הציעו פתרון של בעזרת בעיית זרימה."*

# תרגיל - זרימה בגרף

מבוסס על תרגיל במבחן תשע"ו מועד א':

פתרון:

א. ניצור קשת בין סטודנט לחדר בו הוא מוכן לגור. משקל כל קשת כזו הינו 1.

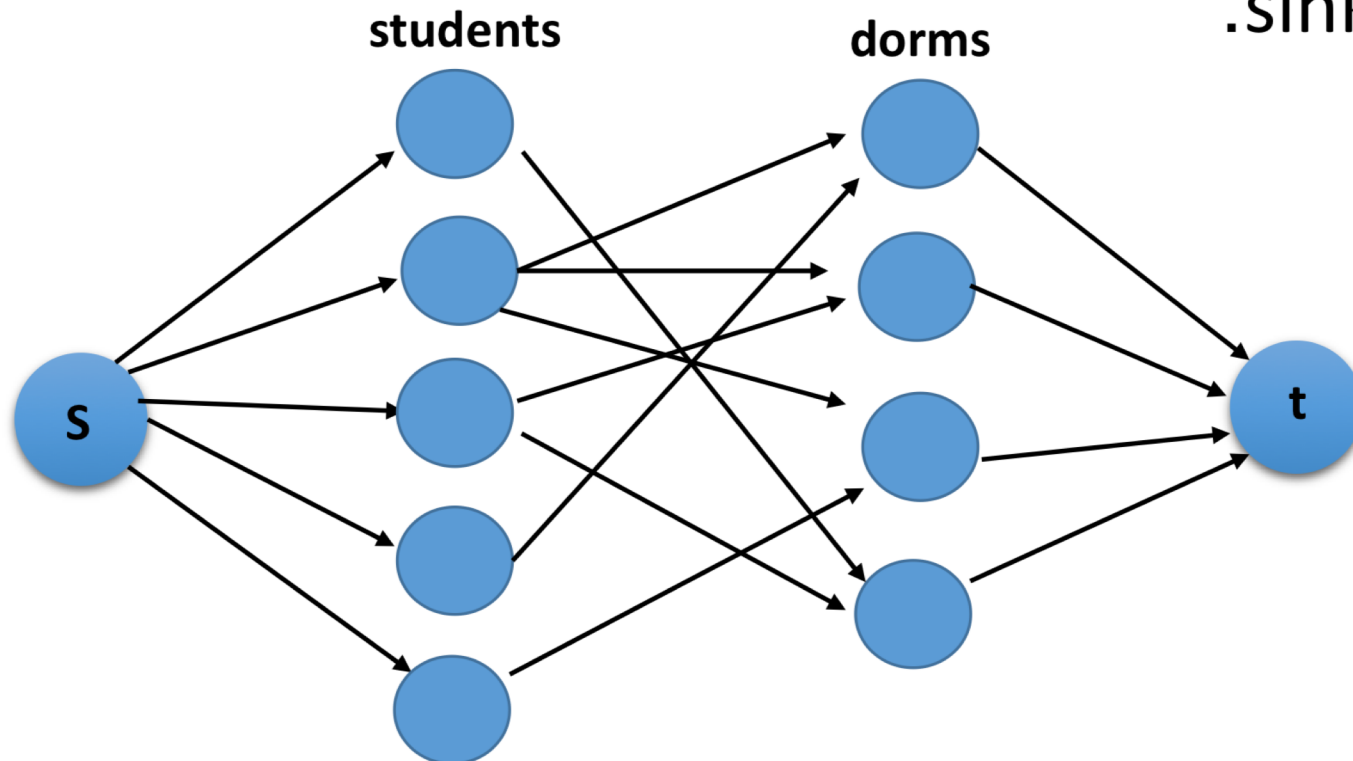
ב. ניצור קודקוד source ו sink.

ג. נמצא את הזרימה המקסימלית.

(מה האלגוריתם של מדתם?)

ד. לפי הזרימה המקסימלית

נמצא את הקשתות.



# תרגיל-עצים פורשים מינמלים

מבוסס על תרגיל מבחן תשע"ו מועד א'

נניח ואין קשתות מאותו משקל. הוכח או הפרך:

א. הקשת הזולה ביותר בגרף תמיד חלק מ-MST.

**פתרון:** נכון. נניח ואינה חלק מ-MST. אזי, אם נוסיף אותה ל-MST נסגור מעגל. ולכן, נוכל להוציא קשת אחרת (שאינה חותכת) וכך להגיע לעץ פורש עם משקל נמוך יותר. ולכן, הקשת הזולה ביותר תמיד חלק מ-MST.

# תרגיל-עצים פורשים מינמלים

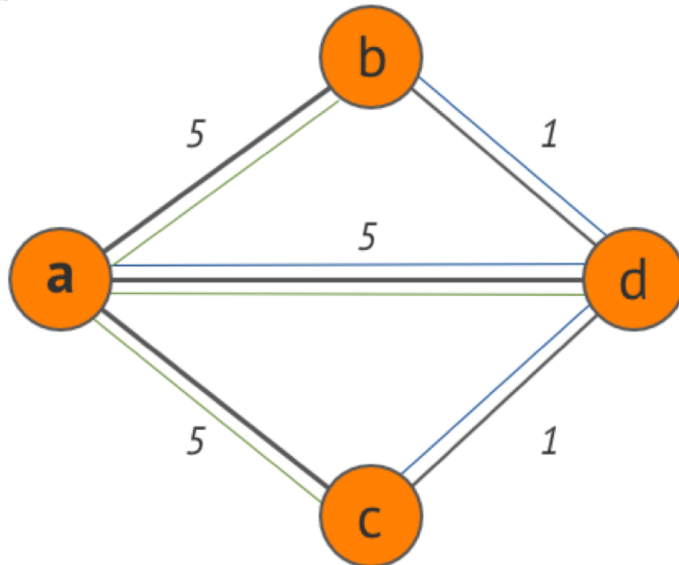
מבוסס על תרגיל מבחן תשע"ו מועד א'

נניח ואין קשתות מאותו משקל. כל הקשתות חיובי. הוכח או הפרך:  
א. נסתכל על המפה שאלגוריתם דייקסטרה יוצר. האם זה עץ? האם זה  
MST?

**פתרון:** דייקסטרה אכן יוצר עץ (מדוע?).

אינו בהכרח יוצר MST

G  
Dijkstra  
Prim



# תרגיל - מיון

מבוסס על מבחן תשע"ו מועד ב'

נתונה רשימת מספרים מגודל 1000 כך שכל מספר ברשימה הוא מספר טבעי בין 1 ל-100.

נניח והרשימה ממוינת. מה אלגוריתם מיון הכי יעיל?

ב. ציינו אלגוריתם בעייתית.

# תרגיל - מיון

מבוסס על מבחן תשע"ו מועד ב'

נתונה רשימת מספרים מגודל 1000 כך שכל מספר ברשימה הוא מספר טבעי בין 1 ל-100.

נניח והרשימה ממוינת. מה אלגוריתם מיון הכי יעיל?

ב. ציינו אלגוריתם בעייתי.

פתרון: Insertion Sort.

ב. Quick Sort.

# תרגיל-מיון

מבוסס על מועד ב' תשע"ח

*מיין את*

*1,5,4,3,4,2,9,11,8,6,10*

*בעזרת radixsort LSD .*



# תרגיל-מיון

*1,5,4,3,4,2,9,11,8,6,10 LSD:*

	לפי ספרת יחדות	לפי ספרת עשרות
01	10	01
05	01	02
04	11	03
03	02	04
04	03	05
02	04	06
09	04	07
11	05	08
08	06	09
06	08	10
10	09	11

# תרגיל-עצים

• בהינתן עץ בינארי, הדפס את העץ לפי רמות (החל מהשורש)

# תרגיל-עצים

• בהינתן עץ בינארי, הדפס את העץ לפי רמות (החל מהשורש)

BFS

## דחיסה- תשע"ג

18) משה התבקש למצוא מחרוזת בינרית באורך 30 שדורשת לפחות 20 מילים בקוד LZ כז  
לדחוס אותה ונכשל. עזור למשה למצוא מחרוזת כזו. את אי אפשר, הסבר למשה מדוע  
בלתי אפשרי. (10 נקודות)

## פתרון (הסבר בקצרה)

- הפרכה: על מנת ליצור 20 מילים בקוד LZ עלינו לראות 20 מילים שונות בקוד באורך 30 וזה בלתי אפשרי.

# המשך תשע"ג

19) כתוצאה מכישלונותיו, המאפיה רודפת אחריו, ומשה צריך לברוח מן הבית עם תיק בנפח 10000 והוא רוצה למלא בו ערך מירבי. יש למשה 17 חפצים בנפחים שלמים (לקטן ביותר נפח של 1) שונים ועלויות שונות. משה מתלבט האם עדיף פתרון של תכנון דינמי, פתרון חמדני או פתרון של בדיקת כל האפשרויות. עזור למשה להחליט. (6 נקודות)

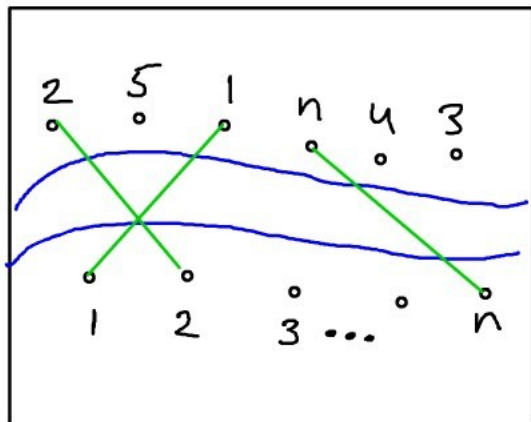
# המשך תשע"ג

19) כתוצאה מכישלונותיו, המאפיה רודפת אחריו, ומשה צריך לברוח מן הבית עם תיק בנפח 10000 והוא רוצה למלא בו ערך מירבי. יש למשה 17 חפצים בנפחים שלמים (לקטן ביותר נפח של 1) שונים ועלויות שונות. משה מתלבט האם עדיף פתרון של תכנון דינמי, פתרון חמדני או פתרון של בדיקת כל האפשרויות. עזור למשה להחליט. (6 נקודות)

21) לצורך סידור המחשב, משה צריך לחבר כמה שיותר כבלים בין מרכיבים שונים, אך עליו לדאוג לכך ששום כבלים לא יצטלבו. הסבר למשה איך לחבר מספר כבלים רב ככל האפשר (8 נקודות)



# פתרון



$x(i)$  = מיקום של  $i$  בצד השני

נחשב  $LIS(x)$

נשתמש במספר סימונים ומשפטים פשוטים:

1. נגדיר את הרישה  $i$  של  $X$  כ  $X_i = x_1, \dots, x_i$ .
2. נגדיר כ  $l(i)$  את אורך LIS של  $X_i$  שאיברה האחרון הוא  $x_i$ .
3. נשים לב ש:

1.  $\max_{1 \leq i \leq n} [l(i)]$  הוא אורך LIS של  $X$ .

2.  $l(i) = 1 + \max_{1 \leq j < i, x_j \leq x_i} [l(j)]$   $l(i)$  מקיים את הנוסחה

# תכנון דינאמי - תרגיל נוסף

נתונה סידרה  $X = [x_1, \dots, x_n]$  של מספרים גדולים או שווים ל-1. תת-סידרה  $X'$  של  $X$  נקראת *חברותית* אם היא מכילה לפחות שני איברים עוקבים של  $X$ , ו*בדלנית* אם היא איננה חברותית.

**דוגמה:**

נניח ש  $X = [1, 5, 2, 7]$  . אז:

1.  $X' = [1, 5]$  היא תת-סידרה חברותית.
2.  $X' = [1, 7]$  היא תת-סידרה בדלנית.
3.  $X' = [1, 5, 7]$  היא תת-סידרה חברותית.
4.  $X' = [1]$  היא תת-סידרה בדלנית.
5.  $X' = []$  היא תת-סידרה בדלנית.

אנא כתוב אלגוריתם אשר מקבל סידרה  $X$  ומדפיס תת-סידרה בדלנית שמכפלת איבריה גדולה ככל האפשר.

נגדיר כ- $m(i)$  את המכפלה הגדולה ביותר האפשרית של תת-סידורה בדלנית של  $[x_1, \dots, x_i]$  (שים לב שתת-הסדרה אינה בהכרח משתמשת ב- $x_i$ ).

#### משפט:

$m(i)$  מקיימת את נוסחת הנסיגה הבאה:

1. אם  $i = 1$ , אז  $m(i) = x_1$ .

2. אם  $i = 2$ , אז  $m(i) = \max\{x_1, x_2\}$ .

3. אם  $i > 2$ , אז  $m(i) = \max\{m(i-1), m(i-2) \cdot x_i\}$ .

#### הוכחה: נשים לב לנקודות הבאות:

1. אם  $i = 1$ , אז בוודאי שנבחר באיבר הראשון (כל איבר הוא לפחות 1); נקבל בהכרח  $x_1$ .

2. אם  $i = 2$ , אז בוודאי שנבחר באיבר הראשון או באיבר השני (כל איבר הוא לפחות 1); נקבל בהכרח  $\max\{x_1, x_2\}$ .

3. אם  $i > 2$ , אז או שנבחר ב- $x_i$  או שלא (אלו שתי האפשרויות היחידות).

• אם נבחר ב- $x_i$ , אז לא נוכל לבחור ב- $x_{i-1}$ ; במקרה זה נרצה להכפיל את  $x_i$  בתוצאה הטובה ביותר האפשרית עד  $i-2$ , שהיא  $m(i-2)$ .

• אם לא נבחר את  $x_i$ , אז נרצה את תת-הסדרה הטובה ביותר עד  $i-1$ , שהיא, עפ"י ההגדרה,  $m(i-1)$ .

בנקודה השלישית, היות שאיננו יודעים אם כדאי לבחור את האיבר ב- $i$  או לא - ניקח את המקסימום משתי האפשרויות.

3. בעיית היחידות (Element uniqueness problem):

נתונים  $n$  מספרים  $x_1, \dots, x_n$ . הציעו אלגוריתם שבודק אם קיימים  $i \neq j$  עבורם  $x_i = x_j$ .

פתרון שני

נכניס את המספרים לטבלת גיבוב, בשיטת השרשור (אפשר היה לפתור גם עם מיעון פתוח).

פונקצית הגיבוב וגודל הטבלה  $m$  ייבחרו באחת הדרכים שלמדנו.

אם יש התנגשות, נבדוק האם האיבר שמכניסים שווה לאחד האיברים ברשימה.

# simplex

## הגדרה

הבעיה הדואלית לפרימלית הנ"ל היא:

$$\begin{aligned} \min w &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t} &: \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \\ & j = 1, \dots, n \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

בבעיה הדואלית, מספר האילוצים הוא כמספר המשתנים בבעיה הפרימלית ולהפך.

## דוגמה

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t} &: x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

הבעיה הדואלית לבעיה זו היא:

$$\begin{aligned} \min w &= 4y_1 + 6y_2 + 18y_3 \\ \text{s.t} &: y_1 + 3y_3 \geq 3 \\ & y_2 + 2y_3 \geq 5 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$