# מתמטיקה בדידה (88195) – פתרון בחינת סיום (מועד א')

## פרופ' רון עדין

*משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).*
*אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.*
*5 השאלות הן שוות-משקל. יש לענות על כולן, כל שאלה בעמוד נפרד.*
*ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".*
*יש להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.*

*בהצלחה!*

1. נסחו והוכיחו את משפט קנטור לגבי עוצמת קבוצת החזקה.

<u>ניסוח:</u> לכל קבוצה $A$, $|A|<|P(A)|$.
<u>הוכחה:</u> עיינו בסיכומי ההרצאות.

2. הוכיחו או הפריכו:
א. אם $f:A\to B$ פונקציה חח"ע אז קיימת פונקציה $g:B\to A$ המקיימת $g\circ f=id_A$.

בסעיף זה תתקבלנה הן הוכחה והן הפרכה...
<u>הפרכה:</u> פורמלית, הטענה איננה נכונה, כי אם $A=\varnothing$ אבל $B\neq\varnothing$ אז הפונקציה (הריקה) $f:A\to B$ היא חח"ע ומצד שני לא קיימת בכלל פונקציה $g:B\to A$.
<u>הוכחה:</u> אם $A\neq\varnothing$ אז הטענה נכונה: אם $f:A\to B$ חח"ע אז לכל $y\in B$ יש מקור אחד לכל היותר ב- $A$. נבחר $x_0\in A$ כלשהו (הנחנו $A\neq\varnothing$), ונגדיר $g:B\to A$ ע"י

$$g(y):=\begin{cases} x, & \text{if } "f^{-1}"(\{y\})=\{x\} \\ x_0, & \text{if } "f^{-1}"(\{y\})=\varnothing \end{cases} \qquad (\forall y\in B)$$

אזי $g(f(x))=x$ לכל $x\in A$, כנדרש.

ב. אם $f:A\to B$, $g:B\to C$ ו- $h:C\to D$ פונקציות כך ש- $h\circ g\circ f$ הפיכה, אז $g$ היא חח"ע או על.

<u>הפרכה:</u> ניקח למשל $A=D=\{1\}$, $B=C=\{2,3\}$, $f(1)=2$, $g(2)=g(3)=2$, $h(2)=h(3)=1$. כאן $g:B\to C$ איננה חח"ע וגם לא על, אבל $h\circ g\circ f$ הפיכה.

3. יהיו: $a=\aleph$, $b=2^{\aleph}$.
רשמו כל אחת מהעוצמות הבאות בצורה הפשוטה ביותר, וציינו אילו מהן שוות זו לזו ומי גדולה ממי; נמקו את טענותיכם.
$a^b, a+b, a\cdot b, b^a, {\aleph_0}^a, {\aleph_0}^b$

<u>תשובה</u>:

$a+b=a\cdot b=\aleph_0{}^a=b^a=2^{\aleph}<\aleph_0{}^b=a^b=2^{2^{\aleph}}$

נימוקים (בקצרה):

$b\le a+b\le b+b=b \quad\Rightarrow\quad a+b=b$

$b\le a\cdot b\le b\cdot b=b \quad\Rightarrow\quad a\cdot b=b$

$2^{\aleph}=2^a\le\aleph_0{}^a\le b^a=(2^{\aleph})^{\aleph}=2^{\aleph\cdot\aleph}=2^{\aleph} \quad\Rightarrow\quad \aleph_0{}^a=b^a=2^{\aleph}$

$2^b\le\aleph_0{}^b\le a^b=\aleph^b=(2^{\aleph_0})^b=2^{\aleph_0\cdot b}=2^b \quad\Rightarrow\quad \aleph_0{}^b=a^b=2^b=2^{2^{\aleph}}$

לבסוף, $2^{\aleph}<2^{2^{\aleph}}$ בגלל משפט קנטור (שאלה מס' 1).

4. תהי $(P,\le)$ קבוצה סדורה חלקית, ויהי $a\in P$. הוכיחו: $a$ שייך לכל שרשרת מקסימלית ב- $P$ אם ורק אם $a$ ניתן להשוואה לכל איבר ב- $P$.

<u>הוכחה</u>: (כיוון אחד דורש את אקסיומת הבחירה)
$\Rightarrow$: נניח ש- $a$ ניתן להשוואה לכל איבר ב- $P$, ותהי $C$ שרשרת מקסימלית ב- $P$. גם $C\cup\{a\}$ היא שרשרת ב- $P$ (כי כל איבר בה, כולל $a$, ניתן להשוואה לכל איבר אחר בה), והיא מכילה את $C$. בגלל מקסימליות, בהכרח $C\cup\{a\}=C$ ולכן $a\in C$.
$\Leftarrow$: נניח ש- $a$ <u>לא</u> ניתן להשוואה לכל איברי $P$, ויהי $b$ איבר כזה ($a$, $b$ אינם ניתנים להשוואה). $\{b\}$ היא שרשרת ב- $P$, ולפי עקרון המקסימום של האוסדורף היא מוכלת בשרשרת מקסימלית $C$. $C$ מכילה את $b$, ולכן אינה מכילה את $a$, ז"א: $a$ <u>אינו</u> שייך לכל השרשראות המקסימליות ב- $P$.

5. חשבו בכמה דרכים ניתן לחלק 140 מחברות בחינה ל- 70 סטודנטים, אם:
א. כל המחברות זהות, וכל סטודנט מקבל מחברת אחת לפחות (כל המחברות מחולקות).

<u>פתרון</u>: תחילה נחלק מחברת אחת לכל סטודנט. נותרו 70 מחברות זהות, לחלוקה (עד תומן) ל- 70 סטודנטים, ללא הגבלות. מספר הדרכים לעשות זאת הוא מספר הפתרונות של המשוואה $x_1+\ldots+x_{70}=70$ כאשר כל $x_i$ הוא שלם אי-שלילי, שהוא גם מספר הצירופים עם חזרות של 70 מתוך 70 עצמים: $\binom{139}{70}$.

ב. המחברות ממוספרות (מספר שונה לכל מחברת), וכל סטודנט מקבל שתי מחברות בדיוק (אין חשיבות לסדר ביניהן).

<u>פתרון</u>: מספר הדרכים לחלק שתי מחברות לסטודנט הראשון הוא $\binom{140}{2}$.
אחר כך, מספר הדרכים לחלק שתי מחברות לסטודנט השני הוא $\binom{138}{2}$,
וכו'. מספר הדרכים הכולל הוא המכפלה (מקדם מולטינומי)

$$\binom{140}{2}\binom{138}{2}\cdots\binom{2}{2}=\binom{140}{2\;2\;\ldots\;2}=\frac{140!}{2^{70}}\ .$$