1. בתרגול האחרון ראינו את הפונקציה $g(x)=\begin{cases}2x-1 & x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ והוכחנו שלכל $a\neq 1$ לא קיים הגבול $\lim_{x\to a} g(x)$. הוכיחו כי בנקודה $a=1$ כן קיים הגבול, בשתי דרכים שונות:

   א. לפי הגדרת הגבול לפי היינה
   ב. לפי הגדרת הגבול לפי קושי

2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. כזכור הגדרת הגבול לפי קושי היא שהגבול של הפונקציה ב-$a\in\mathbb{R}$ הוא $L\in\mathbb{R}$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|f(x)-L|<\epsilon$.

   א. הראו כי ההגדרה שקולה להגדרה עם $|f(x)-L|\leq\epsilon$ במקום $|f(x)-L|<\epsilon$.
   ב. הראו כי ההגדרה שקולה להגדרה עם $0<|x-a|\leq\delta$ במקום $0<|x-a|<\delta$.
   ג. הראו כי ההגדרה **__איננה__** שקולה להגדרה עם $\epsilon\geq 0$ במקום $\epsilon>0$.
   ד. הראו כי ההגדרה **__איננה__** שקולה להגדרה עם $\delta\geq 0$ במקום $\delta>0$.
   ה. הראו כי ההגדרה **__איננה__** שקולה להגדרה עם $|x-a|<\delta$ במקום $0<|x-a|<\delta$.

__הדרכה:__ סעיף א': הראו כי כל פונקציה המקיימת את ההגדרה המקורית מקיימת גם את ההגדרה המופיעה בסעיף א', ולהיפך. סעיף ב' כנ"ל. סעיף ג': תנו דוגמא לפונקציה שמקיימת את ההגדרה הרגילה ואיננה מקיימת את ההגדרה בסעיף ג', או שמקיימת את ההגדרה בסעיף ג' ולא מקיימת את ההגדרה הרגילה. סעיפים ד', ה', כנ"ל.

3. הוכיחו לפי הגדרת הגבול לפי קושי:
   א. $\lim_{x\to 3} 2x-17=-11$
   ב. $\lim_{x\to -4}\frac{x-10}{x+6}=-7$
   ג. $\lim_{x\to 5} x^3=125$

4. __הגדרת הגבול במובן הרחב לפי קושי:__ נאמר כי הגבול של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ בנקודה $a\in\mathbb{R}$ הוא ∞ אם לכל $M\in\mathbb{R}$ (מספיק לקחת $M>0$) קיים $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $f(x)>M$.
   א. נסחו הגדרה דומה עבור $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$
   ב. נסחו הגדרה עבור $\lim_{x\to\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$
   ג. נסחו הגדרה עבור $\lim_{x\to -\infty} f(x)=L\in\mathbb{R}$
   ד. נסחו הגדרה עבור $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$
   ה. נסחו הגדרה עבור $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$
   ו. נסחו הגדרה עבור $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\infty$
   ז. נסחו הגדרה עבור $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$

5. הוכיחו לפי הגדרת הגבול לפי קושי:
   א. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

ב. $\lim_{x\to\infty}\log(2x-6)=\infty$

ג. הוכיחו כי לא קיימים הגבולות $\lim_{x\to\infty}\sin(x)$, $\lim_{x\to-\infty}\sin(x)$ (גם לא במובן הרחב).

ד. $lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{2x+3}=\frac{1}{2}$

ה. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=\infty$

6. א. תנו דוגמא לפונקציה $f(x)$ כך שהגבול $\lim_{x\to\infty}f(x)$ איננו קיים, אך הגבול של הסדרה $\lim_{n\to\infty}f(n)$ (עבור n-ים טבעיים) כן קיים.
ב. האם ייתכן מצב הפוך, כלומר כי גבול הסדרה לא קיים אך גבול הפונקציה כן? הוכיחו.

7. הוכיחו כי לפונקציה $f(x)=\lfloor x\rfloor$ (פונקציית הערך השלם) יש גבול ב-$a\in\mathbb{R}$ אמ"מ $a\notin\mathbb{Z}$.
<u>הדרכה:</u> עבור $a\in\mathbb{Z}$ הראו שלא קיים הגבול ע"י היינה (שתי סדרות השואפות ל-a שתמונתן תחת f שואפות לשני גבולות שונים), ועבור $a\notin\mathbb{Z}$ הוכיחו כי הגבול קיים לפי קושי.