אינפי 3 – הרצאה 3 – פרק 2
תורת הקבוצות ב$\mathbb{R}^n$

גבול של סדרה

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}, x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m)$$
$$x_m = (x_{m1}, \dots, x_{mn})$$

הגדרה

תהי $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ $x^m \in \mathbb{R}^n$. L גבול של הסדרה אם $\lim\limits_{m\to\infty} ||x^m - L|| = 0$.

לא תלוי בבחירה של נורמה מכיוון שאם $||\ \ ||, |||\ \ |||$ נורמות ב$\mathbb{R}^n$ אזי $k\,|||x||| \le ||x|| \le k\,|||x|||$

ולכן $k\,|||x^m - L||| \le ||x^m - L|| \le K\,|||x^m - L|||$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} ||x^m - L|| = 0 \Leftrightarrow lim_{n\to\infty} |||x^m - L||| = 0$$

$$L \coloneqq \lim_{m\to\infty} x^m \qquad x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L$$

$$\boxed{L = \lim_{m\to\infty} x^m \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \bar{m} \forall m \ge \bar{m} : ||x^m - L|| < \epsilon}$$

משפט

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}, x^m \in \mathbb{R}^n$$
$$x^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots, n : x_j^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L_j$$

הוכחה

ניקח $||x||_1$.

בכיוון הראשון

$$||x^m - L||_1 = |x_1^m - L_1| + \cdots + |x_n^m - L_n|$$
$$\forall j : \ 0 < |x_j^m - L_j| \le ||x^m - L_j||_1 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

ולכן לפי הלמה של הסנדוויץ' $\forall j : \ x_j^m \to L_j$

בכיוון השני, אם $\forall j\ |x_j^m - L_j| \to 0$ אזי

$$||x^m - L||_1 = |x_1^m - L_1| + \cdots + |x_n^m - L_n| \to 0$$

ולכן $\lim\limits_{m\to\infty} x^m = L$

תכונות

תהיו $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}, \{y^m\}_{m=1}^{\infty}$, $\lim_{m\to\infty} y^m = M$, $\exists \lim_{m\to\infty} x^m = L$, אזי

1) $\exists \lim_{m\to\infty}(\alpha x^m + \beta y^m) = \alpha L + \beta M$
2) $\exists lin_{m\to\infty}\langle x^m, y^m\rangle = \langle L, M\rangle$
3) $\lim_{m\to\infty}||x^m|| = ||L||$

הוכחות

1) לפי קורדינטות.
2) $\lim_{m\to\infty}\langle x^m, y^m\rangle = \lim_{m\to\infty}\sum x_i^m y_i^m = \langle L, M\rangle$
3) $\left|||x^m|| - ||L||\right| \le ||x^m - L||$

$$||x^m - L|| \to 0 \Rightarrow ||x^m|| \to ||L||$$

תתי סדרה

$$\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$$
$$\mathbb{N} \ni j \to m_j \in \mathbb{N}$$
$$j < s \Rightarrow m_j < m_s$$
$$\{x^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$$

משפט

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה

$$x^m \to L$$
$$\epsilon = 1\, \exists \bar{m} \forall m \ge \bar{m} : ||x^m - L|| < 1$$
$$M := \max\left\{||x^1||, \dots, ||x^{\bar{m}-1}||, ||L|| + 1\right\}$$
$$||x^m|| = ||L + (x^m - L)|| \le ||L|| + 1$$
$$m \ge \bar{m} \quad ||x^m|| \le M$$
$$m \le \bar{m} - 1 \quad ||x^m|| \le M$$

למה Balzano Weirtrass

אם $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ חסומה אז קיימת תת סדרה $\{x^{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ המתכנסת.

הוכחה

$$\forall m \in \mathbb{N} : ||x^n|| < C$$
$$||x^m||_{\infty} = \max\{|x_1^m|, \dots, |x_n^m|\}$$
$$\forall j\ |x_j^m| \le C$$

נתחיל עם $\{x_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ חסומה, ולכן קיימת $\left\{x_1^{m_{j_1}}\right\}_{j_1=1}^{\infty}$ המתכנסת.

נתבונן בסדרה $\left\{x_2^{m_{j_1}}\right\}_{j_1=1}^{\infty}$ חסומה ולכן קיימת $\left\{x_2^{m_{j_{1_{j_2}}}}\right\}_{j_2=1}^{\infty}$ המתכנסת, נמשיך כך עם כל הקורדינטות.

בסוף: $\left\{x_n^{m_{j_{1_{\ddots_{j_n}}}}}\right\}_{j_n=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{x^m\}_{m=1}^{\infty}$ המתכנסת.

פונקציות

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$$

$m = 1$ נאמר כי f סקלית

$m > 1$ נאמר כי f וקטור-פונקציה.

Ω – תחום הגדרה, $\Omega = Dom(f)$

גרף

$$f: \overset{\subseteq \mathbb{R}^n}{\Omega} \to \mathbb{R}^m$$

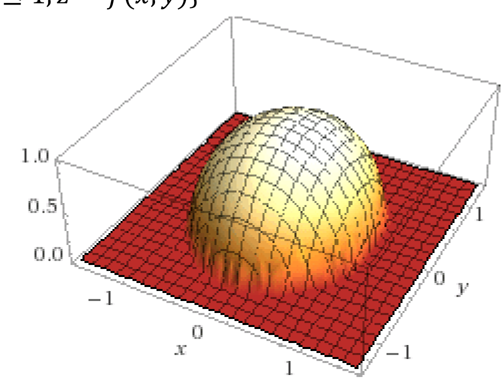
$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

$$Graph(f) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^{n+m} : x_{n+1} = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m} = f_m(x_1, \dots, x_n)\}$$

דוגמאות

1) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

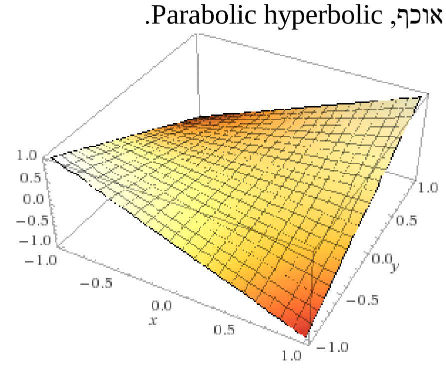
$$Dom(f) = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$$
$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = f(x,y)\}$$



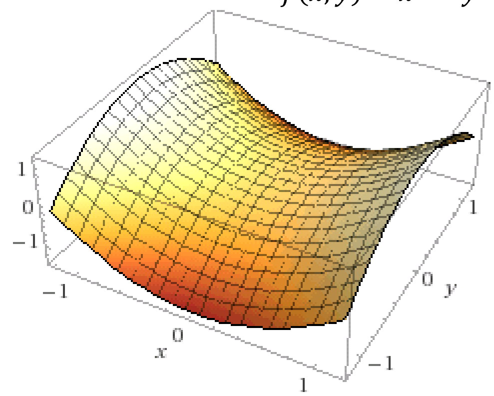
2) $f(x,y) = xy$

$$Dom(f) = \mathbb{R}^2, \qquad \Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\}$$

אוכף, Parabolic hyperbolic.



3) $f(x,y)=x^2-y^2$



נשים לב כי $z=x^2-y^2=(x-y)(x+y)=\{u=x-y,v=x+y\}=uv$

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

כלומר הפונקציה xy היא העצם הפונקציה שלנו עם סיבוב ב$-\frac{\pi}{4}$ ועם מתיחה $\sqrt{2}$.

גבול של פונקציה

$$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n, p\in\mathbb{R}^n$$

הגדרה

p-נקודת גבול, $p\in Lim\Omega$ אם:

$$\forall\epsilon>0\exists x\in\Omega, x\neq p:\left||x-p|\right|<\epsilon$$
$$\forall\epsilon>0\ (B(p,\epsilon)-\{p\})\cap\Omega\neq\phi$$

הגדרה

$$f:\Omega\to\mathbb{R}^n, p\in Lim\Omega$$

אומרים שווקטור $L\in\mathbb{R}^n$ הוא גבול של f בנקודה p אם מתקיים:

$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0:\forall x\in\Omega:\ x\neq p\wedge\left||x-p|\right|<\delta\Rightarrow\left||f(x)-L|\right|<\epsilon$$

$$L=\lim_{x\to p}f(x)\qquad f(x)\xrightarrow[x\to p]{}L$$

גאומטרי

$$L=\lim_{x\to p}f(x)\Leftrightarrow\forall\epsilon>0\exists\delta>0:f(B(p,\delta)-\{p\})\subset B(L,\epsilon)$$