טענה (2.3)

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנת ויהי L הגבול שלה. יהיה $c \in \mathbb{R}$ קבוע. אזי הסדרה $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $c \cdot L$.

הוכחה

קודם כל נטפל במקרה $c = 0$. אזי $ca_n = 0$ לכל n, לכן הסדרה $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה הסדרה הקבועה $0,0,0,\dots$. לכל $\varepsilon > 0$, כל ca_n מקיים $0 = \{ca_n\} < \varepsilon$, לכן $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = 0 = c \cdot L$. נניח $c \neq 0$ ויהי $\varepsilon > 0$. יהי $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c}$. לפי הגדרת ההתכנסות, קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon'$. $|a_n - c \cdot L| = |c| \cdot |a_n - L|$. אבל, לכל $n \geq N$, $|a_n - L| < \varepsilon'$ מתקיים

$|c \cdot a_n - c \cdot L| < |c| \cdot \varepsilon' = |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. הוכחנו שלכל $n \geq N$ מתקיים

$|c \cdot a_n - c \cdot L| < \varepsilon$ כלומר $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot L$

טענה (2.4)

תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות, יהיו M, L הגבולות שלהם בהתאמה כלומר $a_n \to L, b_n \to M$ אזי אם נגדיר $c_n = a_n + b_n$, הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L + M$.

(ביחד עם הטענה הקודמת, אם $c_n = r \cdot a_n + s \cdot b_n$, $c_n \to r \cdot L + s \cdot M$)

הוכחה

יהי $\varepsilon > 0$. לפי ההגדרה של גבול, קיים N' כך שלכל $n \geq N'$ מתקיים $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. באופן דומה עם הסדרה השנייה, קיים N'' כך שלכל $n > N''$ מתקיים $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$. יהי $N = \max\{N', N''\}$, לכן, לכל $n \geq N$ מתקיים גם $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}$. לכן, לכל $n \geq N$:

$$|c_n - (L + M)| = |a_n + b_n - (L + M)| = |(a_n - L) + (b_n - M)|$$
$$\leq |a_n - L| + |b_n - M| < 0.5 \cdot \varepsilon + 0.5 \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

לכן $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$.

הערה

- יש מבנה טבעי של מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ על הקבוצה של כל הסדרות המתכנסות.

• הוכחנו שאם $\{a_n, b_n\}$ מתכנסות אזי גם $\{a_n + b_n\}$ מתכנסות. ההיפך אינו נכון, כלומר יתכן ש$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרות (לא מתכנסות) אבל $\{\ a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כן מתכנס.
דוגי: $a_n = n, b_n = -n \to c_n = a_n + b_n = 0$.

טענה (2.5)

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, אזי הקבוצה $\{a_1, a_2, ..\} \subseteq \mathbb{R}$ חסומה (מלעיל ומלרע).

הוכחה:

יהי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (קיים ע"פ ההנחה). ניקח $\varepsilon = 1$ בהגדרה של התכנסות ונקבל N כך שלכל $n \geq N$: $L - 1 < a_n < L + 1$.
נגדיר: $m = \min\{L - 1, a_1, a_2, \dots a_{N-1}\}$ ונגדיר $M = \max\{L + 1, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}\}$.
נשים לב כי $m \leq a_n$ לכל $n \geq 1$. אכן, אם $n \geq N$ אזי $m \leq L - 1 < a_n$. אם $n \in \{1, 2, .., N - 1\}$ אזי ברור כי $m \leq a_n$ לפי ההגדרה של m הינו חסם מלרע של הקבוצה $\{a_n: n \geq 1\}$.

טענה (2.6)

תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות לגבולות M, L בהתאמה. נגדיר $c_n = a_n \cdot b_n$

אזי הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $M \cdot L$.

הוכחה:

לפי הטענה הקודמת, הקבוצות $\{a_n: n \geq 1\}$ חסומות. זה אומר שקיים $\{b_n: n \geq 1\}$, M' כך ש $M' \geq |a_n|$ לכל $n \geq 1$. גם קיים M'' כך ש-$|b_n| \leq M'$ לכל $n \geq 1$.
$M' \geq |a_n| \leq m$ לכל $n \geq 1$. אזי $M' \geq |a_n$ לכל $n \geq 1$.
נגדיר $T = \max\{|L|, |M|, M', M''\}$. נניח כי $T > 0$ (כי אם $T = 0$ אזי $a_n = b_n = 0$ לכל n ואז הטענה טריוו'). יהי $\epsilon > 0$. לפי ההגדרה של התכנסות מתקיים $|a_n - L| < \frac{\epsilon}{2 \cdot T}$. באופן דומה קיים N'' כך שלכל $n \geq N''$ מתקיים $|b_n - L| < \frac{\epsilon}{2 \cdot T}$. יהי $N = \max\{N', N''\}$ אזי, אם $n \geq N$ מתקיים:

$$
\begin{aligned}
|c_n - LM| &= |a_n \cdot b_n - LM| = |a_n b_n - b_n L + b_n L - LM| \\
&\leq |a_n - b_n - b_n L| + |b_n - LM| = |b_n||a_n - L| + |L||b_n - M| \\
&< M'' \cdot \frac{\epsilon}{2T} + T\frac{\epsilon}{2T} \leq T\frac{\epsilon}{2T} + T\frac{\epsilon}{2T} = \epsilon
\end{aligned}
$$

אז הוכחנו כי $\mathrm{lim}_{\mathrm{n}\to\infty} a_n b_n = \mathrm{LM}$.

טענה (2.7) – משפט הסנדוויץ'

תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות ששואפות לאותו גבול L. כלומר, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{b_n} = \mathrm{L}$. תהי $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שלישית ונניח שלכל n מספיק גדול (קיים N, כל שלכל $n \geq N$, $a_n \leq c_n \leq b_n$ אזי בהכרח הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאותו גבול L.

הוכחה

יהי $\epsilon > 0$, קיים N' כך שלכל $n \geq N'$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$ כלומר $L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$.
גם קיים N'' כך שלכל $n \geq N''$ מתקיים $|b_n - L| < \epsilon$ כלומר $\mathrm{L} - \epsilon < b_n < L + \epsilon$. יהי $N''' = \max\{N, N', N''\}$ ויהי $n \geq N'$ אזי $L - \epsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < L + \epsilon$. סך הכל אם $n \geq N'''$ אזי $L - \epsilon < c_n < L + \epsilon$ כלומר $|c_n - L| < \epsilon$ לכן $\lim_{n\to\infty} \mathrm{c_n} = \mathrm{L}$.

טענה (2.8)

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת עם גבול 0, תהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, אבל לא בהכרח מתכנסת, אזי הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ לגבול 0.

הוכחה

לפי ההנחה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה, לכן קיים M כך ש-$|b_n| \leq M$ לכל $n \geq 1$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שלכל $n \geq N$ מתקיים $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. לכן, לכל $n \geq N$:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

הוכחה (עם סנדוויץ')

יהי $M > 0$ כך ש $|b_n| \leq M$ לכל $n \geq 1$ אזי $|a_n b_n| \leq M|a_n|$

$$-M|a_n \leq a_n b_n \leq M|a_n|$$

$$\lim_{n\to\infty} M \cdot a_n = \mathrm{M} \cdot 0 = 0 \to \text{לפי } 2.3$$

$$\lim_{n\to\infty} -M \cdot a_n = \mathrm{M} \cdot 0 = 0 \to \text{לפי } 2.3$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0 \to \text{לפי סנדוויץ'}$$