פתרון תרגיל 13 בדידה להנדסה:

1. נבחר: $\mathbb{N}=A, \mathbb{Z}=B$ ואז $|A|=|B|=\aleph_0$, אך:

$$|A\backslash B|=0\neq\aleph_0=|B\backslash A|$$

2. ראשית, $g:Y\to B$ חח"ע ועל ולכן גם $g^{-1}:B\to Y$ חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה: $h:A\cup B\to X\cup Y$ ע"י:

$$h(c)=\begin{cases} f(c) & c\in A \\ g^{-1}(c) & c\in B \end{cases}$$

קודם כל, נשים לב שזו פונקציה; מכיוון ש־$A\cap B=\phi$, אם $c\in A$ אז $c\notin B$ ואם $c\in B$ אז $c\notin A$, ולכן h חד ערכית.

h חח"ע, כי אם $h(c_1)=h(c_2)$ אז $c_1,c_2\in A$ או $c_1,c_2\in B$;

זאת, כי אם $c_1\in A$ ו־$c_2\in B$ נקבל: $h(c_1)=f(c_1)\neq g^{-1}(c_2)=h(c_2)$ וסתירה.

אם כן, $h(c_1)=f(c_1)=f(c_2)=h(c_2)$ או $h(c_1)=g^{-1}(c_1)=g^{-1}(c_2)=h(c_2)$

ומכיוון שכל אחת מהפונקציות f,g^{-1} חח"ע נקבל:

$$c_1=c_2$$

ולכן h חח"ע.

יהי $d\in X\cup Y$. אם $d\in X$, מכיוון ש־f על קיים $a\in A$ עבורו $f(a)=d$ ולכן $h(a)=d$.

אם $d\in Y$, מכיוון ש־g^{-1} על קיים $b\in B$ עבורו $g^{-1}(b)=d$ ולכן $h(b)=d$.

בכל מקרה ל־d יש מקור ולכן h על.

h חח"ע ועל, ולכן:

$$|A\cup B|=|X\cup Y|$$

ולכן:

$$|C|=|W|$$

3. בהנתן שמיניה מסוימת באוסף, נבחר נקודה רציונאלית אחת מעיגול אחד, ואחת מהעיגול השני.

זה נותן לנו פונקציה מהאוסף אל הזוגות הסדורים של מספרים רציונאליים.

כעת, נוכיח כי פונקציה זו הינה חח"ע.

נניח בשלילה כי לשתי שמיניות שונות יש נקודות משותפים בשני העיגולים.

אם כן, העיגול של האחת נמצא בעיגול של האחרת ולכן גם נקודת ההשקה נמצאת בתוך העיגול האחד.

מכיוון שהעיגול השני מכיל נקודה משותפת עם העיגול השני של השמיניה השנייה, חייב להיות חיתוך ביניהן וזו סתירה (נסו לצייר).

לכן, עוצמת האוסף קטנה מעוצמת הזוגות הסדורים של הרציונאליים, כלומר $|A| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}|$.

לכן, $|A| \leq \aleph_0$ ולכן A בת מניה.

4. ניקח את אוסף המעגלים עם מרכז בראשית ורדיוס ממשי חיובי:

$$S = \{\{(x,y)|x^2+y^2=r^2\}|r \in \mathbb{R}^+\}$$

נתאים כל מעגל לרדיוס שלו, כלומר נגדיר $f : S \to \mathbb{R}^+$ ע"י:

$$f(c) = r$$

כאשר r הוא רדיוס המעגל c.

קל לראות ש$-f$ חח"ע ועל ולכן:

$$|S| = |\mathbb{R}^+| = \aleph$$

5. יהיו $a_1, a_2 \in A$ כך ש: $a_1 \neq a_2$.

כעת, לפי הגדרת f, $f(a_1) = \{B|a_1 \in B, B \subseteq A\}, f(a_2) = \{B|a_2 \in B, B \subseteq A\}$.

$A \supseteq \{a_1\} \ni a_1$ אך $a_2 \notin \{a_2\}$, ולכן $\{a_1\} \in f(a_1)$ אך $\{a_2\} \notin f(a_2)$.

לכן $f(a_1) \neq f(a_2)$ ולכן f חח"ע.

אם לא קיימים $a_1, a_2 \in A$ כאלו, ב$-A$ יש לכל היותר איבר אחד ואז כל פונקציה שתחומה הוא A היא חח"ע.

$|A| \neq |P(P(A))|$ ולכן בוודאי ש$-f$ אינה על.

6. תהיינה $X_1, X_2 \in P(A)$ כך ש: $X_1 \neq X_2$.

לכן, בלי הגבלת הכלליות, מתקיים $X_1 \nsubseteq X_2$.

לפי הגדרת f, נקבל $X_1 \in f(X_1)$ אך $X_2 \notin f(X_2)$.

לכן $f(X_2) \neq f(X_1)$. לכן f חח"ע.

$|P(A)| \neq |P(P(A))|$, ולכן בוודאי f אינה על.