תרגיל 3

1. הוכיחו כי הסדרות הבאות מתכנסות לגבולות הרשומים בצד ימין.

א. 0 $a_n = \frac{1}{n+27}$

ב. 1 $a_n = \frac{n+3}{n+32}$

ג. 4 $a_n = \frac{4n^2-25}{n^2-16}$

2. מיצאו את הגבולות של הסדרות הבאות והוכיחו כי הן מתכנסות אליהם, או הוכיחו כי הן אינן מתכנסות.

א. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^8}$

ב. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2^n+24}$

ג. $a_n = \frac{n^3-n^2+\sqrt{n}}{n^3+n^2-\sqrt{n}}$

3. הוכיחו כי $a_n = \frac{\sqrt{n}+n}{2n-7\sqrt{n}}$ לא מתכנסת ל- $\frac{1}{7}$.

4. להזכירכם, אי-שוויון המשולש אומר שלכל a, b ממשיים מתקיים $|a+b| \le |a| + |b|$.

א. יהיו a, b, c מספרים ממשיים. הראו כי אם $|a-b| < 7$, וגם $|b-c| < 48$ אז $|a-c| < 55$.

ב. יהיו a, b, c מספרים ממשיים, ϵ, ζ ממשיים חיוביים. הראו כי אם $|a-b| < \epsilon$, וגם $|b-c| < \zeta$ אז $|a-c| < \epsilon + \zeta$.

5. להזכירכם, הגדרנו: סדרה ממשית (a_n) מתכנסת למספר הממשי L אם:

לכל $\epsilon > 0$ ממשי קיים N טבעי כך שלכל n טבעי המקיים $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

א. הראו כי אם בהגדרה לעיל משנים את $n > N$ ל-$n \ge N$ אז מתקבלת הגדרה שקולה.

הגדרה שקולה כלומר: כל סדרה שמתכנסת לפי ההגדרה המקורית מתכנסת גם לפי ההגדרה עם $n \ge N$ ולאותו גבול, ולהיפך.

ב. באופן דומה, הראו כי אם משנים את $|a_n - L| < \epsilon$ בהגדרה לעיל ל- $|a_n - L| \le \epsilon$, מתקבלת הגדרה שקולה.

ג. הראו שההגדרה לעיל ***איננה*** שקולה להגדרה בה משנים את $\epsilon > 0$ ל- $\epsilon \ge 0$.

6. תהי a_n סדרה המתכנסת למספר π. נגדיר סדרה חדשה b_n שזהה לסדרה המקורית a_n בכל אחד מהאינדקסים מלבד האינדקס 314, ובאינדקס זה מתקיים $b_{314} = 2a_{314}$. הוכיחו כי b_n מתכנסת גם היא למספר π.