שאלה 1

תהי $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ סדרה בעלת תת-הסדרות

$$b_1: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \dots, b_M: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

המוגדרות ע"י $b_i = a \circ c_i$ באשר $c_i: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ סדרות עולות ממש.

נניח כי $b_i \to L_i \in \mathbb{R}$ לכל i, וכן כי $\bigcup_i Im(c_i) = \mathbb{N}$.

הוכיחו כי אוסף הגבולות החלקיים של $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ הוא בדיוק $\{L_1, L_2, \dots, L_M\}$.

שאלה 2

תהי A קבוצה סופית של מספרים ממשיים. בנו סדרה כך שקבוצת כל הגבולות החלקיים שלה היא A.

שאלה 3 הוכיחו/הפריכו:

א. אם $a_n \le L$ החל ממקום מסוים, אז $limsup(a_n) \le L$.
ב. אם $a_n \le L$ עבור אינסוף n-ים, אז $liminf(a_n) \le L$.
ג. אם $a_n \ge L$ החל ממקום מסוים, אז $limsup(a_n) \ge L$.
ד. אם $a_n \ge L$ עבור אינסוף n-ים, אז $liminf(a_n) \ge L$.

שאלה 4 תהי (a_n) סדרה בעלת תת-סדרות מתכנסות $b_n = a_{2n}$, $c_n = a_{3n}$.

הוכיחו/הפריכו:

א. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$.
ב. הסדרה (a_n) מתכנסת.

שאלה 5 הוכיחו/הפריכו:

א. אם $a_n \to \infty$, $b_n \to 0$ אז $(a_n)^{b_n} \to \infty$.
ב. אם $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ אז $(a_n)^{b_n} \to 0$.
ג. אם $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$ אז $(a_n)^{b_n} \to 0$.

שאלה 6 חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

א. $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

ב. $a_n = \left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{3n}$

ג. $a_n = \left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n$ עבור $a \in \mathbb{R}$

ד. $a_n = \left(\frac{n^2+4}{n^2+n+1}\right)^{3n+2}$

שאלה 7

תהי a_n סדרה המקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$ לכל $n \geq 2$. הוכיחו כי a_n מתכנסת.

רמז:

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \cdots + a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n|$$