הבינום של ניוטון

<u>נתחיל ממקרים פרטיים:</u>

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

(הנוסחאות השניה והרביעית הן מקרה פרטי של הנוסחאות הראשונה והשלישית בהתאמה, כאשר מציבים $-b$ במקום b).

<u>תרגיל.</u> פתחו סוגריים בביטוי: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$.

<u>פתרון.</u> $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3=(\sqrt{3})^3-3(\sqrt{3})^2\sqrt{2}+3\sqrt{3}(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3=3\sqrt{3}-9\sqrt{2}+6\sqrt{3}-2\sqrt{2}=9\sqrt{3}-11\sqrt{2}$

<u>המקרה הכללי:</u>

$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ באשר $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$. יש מקש מיוחד במחשבון עבור נוסחה זו.

כמו כן ניתן למצוא את המקדמים הבינומיים ע"י משולש פסקל.

<u>תרגיל.</u> פתחו סוגריים לפי נוסחת הבינום של ניוטון:

1. $(a+b)^4$
2. $(a-b)^5$
3. $(x+3y^2)^5$
4. $(x^2-\frac{1}{x})^5$

<u>פתרון.</u> נמצא את המקדמים לפי משולש פסקל:

1. $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
2. $(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$
3. $$\begin{aligned}(x+3y^2)^5&=x^5+5x^4(3y^2)+10x^3(3y^2)^2+10x^2(3y^2)^3+5x(3y^2)^4+(3y^2)^5=\\&=x^5+15x^4y^2+10x^3(9y^4)+10x^2(27y^6)+5x(81y^8)+243y^{10}=\\&=x^5+15x^4y^2+90x^3y^4+270x^2y^6+405xy^8+243y^{10}\end{aligned}$$
4. $$\begin{aligned}(x^2-\frac{1}{x})^4&=(x^2)^4+4(x^2)^3\frac{1}{x}+6(x^2)^2\frac{1}{x^2}+4x^2\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}=\\&=x^8-4x^5+6x^2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^4}\end{aligned}$$

<u>תרגיל.</u> מהו המספר החופשי המתקבל לאחר פתיחת הסוגריים ב- $(x^3-\frac{1}{x^3})^8$?

פתרון. נקבל מספר חופשי רק עבור האיבר $k=4$: $(x^3)^4(\frac{1}{x^3})^4=1$. לכן התשובה היא המקדם הבינומי $\binom{8}{4}=70$.

תרגיל. מהו המקדם של x^6 המתקבל לאחר פתיחת הסוגריים בביטוי $(2x-\frac{1}{x})^{14}$?

פתרון. מקבלים את הגורם x^6 רק באיבר $(2x)^{10}(\frac{-1}{x})^4=1024x^{10}\frac{1}{x^4}=1024x^6$ כלומר המקדם הוא $1024\binom{14}{10}=1024\times1001=1025024$.

כפל בצמוד

נשתמש בנוסחאות כפל מקוצר:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

תרגיל. כתבו את המספרים הבאים ללא שורש במכנה:

1. $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

2. $\frac{11\sqrt{5}}{4-\sqrt{3}}=\frac{11\sqrt{5}(4+\sqrt{3})}{(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})}=\frac{44\sqrt{5}+11\sqrt{15}}{13}$

תרגיל. היעזרו בכפל בצמוד כדי להביא את הביטויים הבאים לצורה ללא שברים:

1. $\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}=\frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}-2)}=\frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{x+1-4}=\frac{(\sqrt{x+1}+2)(x-3)}{x-3}=\sqrt{x+1}+2$

2. $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}-1}=\frac{(\sqrt{\sin x}+1)\cos^2 x}{(\sqrt{\sin x}+1)(\sqrt{\sin x}-1)}=\frac{(\sqrt{\sin x}+1)\cos^2 x}{\sin x-1}=\frac{(\sqrt{\sin x}+1)(1-\sin^2 x)}{\sin x-1}=$
$=\frac{(\sqrt{\sin x}+1)(1-\sin x)(1+\sin x)}{-(1-\sin x)}=-(\sqrt{\sin x}+1)(1+\sin x)$

3. $\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$

חזרה על טכניקה אלגברית

<u>תרגיל.</u> פשטו את הביטוי הבא ככל הניתן:

$$\left(\frac{-5x^2-4x-2}{9x^2-1}+\frac{x-1}{3x+1}+\frac{2x+1}{3x-1}\right)\left(\frac{36x^2+24x+4}{4x^2+13x-12}\right)$$

<u>פתרון.</u> נטפל קודם כל בסוגריים השמאליים: המכנה השמאלי מתפרק לפי כפל מקוצר ל- $(3x-1)(3x+1)$ לכן זהו המכנה המשותף ונקבל: $\frac{-5x^2-4x-2+(3x-1)(x-1)+(2x+1)(3x+1)}{(3x-1)(3x+1)}$ כלומר $\frac{x(4x-3)}{(3x-1)(3x+1)}$. כעת נטפל בשבר הימני. המונה הוא $4(9x^2+6x+1)$ וע"י כפל מקוצר נקבל $4(3x+1)^2$. במכנה: רוצים 2 מספרים שמכפלתם -48 וסכומם -13 כלומר הם $-16,3$ לכן הפתרונות הם $x_{1,2}=\frac{-16}{4},\frac{3}{4}=-4,\frac{3}{4}$. כלומר פירוק המכנה הוא $4(x+4)(x-\frac{3}{4})=(x+4)(4x-3)$. כעת נוכל לכפול את שני השברים:

$$\frac{x(4x-3)}{(3x-1)(3x+1)}\frac{4(3x+1)^2}{(x+4)(4x-3)}=\frac{4x(3x+1)}{(3x-1)(x+4)}$$

<u>תרגיל.</u> נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{4}{7-x}$ ו- $g(x)=\frac{x^2}{x^2-10x+21}$. עבור אילו ערכים של x גרף הפונקציה $f(x)$ יימצא מתחת לגרף הפונקציה $g(x)$?

<u>פתרון.</u> אנחנו רוצים לפתור את אי-השוויון $\frac{4}{7-x}<\frac{x^2}{x^2-10x+21}$. נשים לב כי המכנה של צד ימין מתפרק ל- $x^2-10x+21=(x-7)(x-3)$ וע"כ תחום ההגדרה של אי-השוויון הוא $x\neq 3,7$. ראשית נפתור את המשוואה: $\frac{4}{7-x}=\frac{x^2}{(x-7)(x-3)}$ כלומר $\frac{-4}{x-7}=\frac{x^2}{(x-7)(x-3)}$ ע"י מכנה משותף $(x-7)(x-3)$ ונקבל $-4(x-3)=x^2$ כלומר $x_{1,2}=-6,2$. כלומר בהינתן 2 פתרונות אלו ו-2 נקודות בהן אי-השוויון לא מוגדר, קיבלנו סה"כ שהישר הממשי התפצל ל-5 תחומים שבכל אחד מהם נבחר נקודה באופן שרירותי ונבדוק האם אי-השוויון מתקיים שם. על כן ע"י הצבות נקבל שהפתרון הוא $x<-6$ או $2<x<3$ או $x>7$.

<u>תרגיל.</u> פתרו את אי-השוויון: $\sqrt{-2x^2+6x+1}>2x+1$.

<u>פתרון.</u> תחום ההגדרה הוא $-2x^2+6x+1\geq 0$ כלומר $\frac{3-\sqrt{11}}{2}\leq x\leq\frac{3+\sqrt{11}}{2}$. נפתור ראשית את המשוואה המתאימה ע"י העלאה בריבוע: $\sqrt{-2x^2+6x+1}=2x+1$ כלומר $-2x^2+6x+1=(2x+1)^2$ כלומר $x_{1,2}=0,\frac{1}{3}$. העלנו בריבוע (פעולה לא הפיכה) ע"כ יש לבדוק את הפתרונות ע"י הצבה במשוואה ואכן שניהם מקיימים אותה. נחזור לפתרון אי-השוויון: 2 הנקודות שלנו מפצלות את תחום ההגדרה ל-3 תחומים וע"כ נשאר להציב 3 נקודות מתחומים אלו באופן שרירותי ולבדוק האם אי-השוויון מתקיים שם. הצבה מראה כי הפתרון הוא $0<x<\frac{1}{3}$.

<u>תרגיל.</u> פתרו את אי-השוויון: $\sqrt{x+5}-\sqrt{8-x}<1$.

<u>פתרון.</u> תחום ההגדרה של אי-השוויון הוא $-5\leq x\leq 8$. נפתור את המשוואה המתאימה ע"י העברת אחד השורשים אגף (לא חובה): $\sqrt{x+5}=1+\sqrt{8-x}$ והעלאה בריבוע: $x+5=1+2\sqrt{8-x}+8-x$. נבודד את השורש $2\sqrt{8-x}=x-2$

והעלאה נוספת בריבוע תתן $x_{1,2}=-1,4$. יש לבדוק את הפתרונות בגלל פעולת ההעלאה בריבוע – אכן שניהם מקיימים את המשוואה. כעת נחזור לפתרון אי-השוויון: שני הפתרונות מחלקים את תחום ההגדרה לשלושה קטעים. נציב נקודה כלשהי בכל אחד מהקטעים כדי לבדוק אם אי-השוויון מתקיים שם, ונקבל כי הפתרון הוא $-5\le x<4$.