6.12.2020

תורת גלואה - תרגול 8

$$\alpha = 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} + 7\sqrt{-3} \quad (1)$$

<u>הערה:</u> אם K/F הרחבה שגו..., $\alpha \in K$

אז לכל אוט׳ σ שמקבע את F,

$$X-\sigma(\alpha) \mid \underbrace{p_\alpha(x)}_{\text{הפ״מ של } \alpha \text{ מעל } F}$$

$$p_\alpha(x) = \prod_{\sigma: F(\alpha)\hookrightarrow \bar{F}} (x-\sigma(\alpha))$$

במילים, כאשר K/F הרחבה גלואה, ניתן ״לקרוא״ את דרגת הפ״מ מתוך המסלול של אלפא תחת פעולת חבורת גלואה.

במקרה שלנו: $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$

θ, x^3-2, $\rho = \rho_3$

$$\alpha = \ldots\theta + \ldots\theta^2 + \ldots\sqrt{-3}$$

מספיק לבדוק כמה צמודים יש לו

$$\sigma: \begin{array}{l} \theta \mapsto \rho\theta \\ \rho \mapsto \rho \end{array} \quad , \quad \tau: \begin{array}{l} \rho \mapsto \rho^{-1} \\ (\sqrt{-3} \mapsto -\sqrt{-3}) \\ \theta \mapsto \theta \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \theta + \theta^2 \pm \sqrt{-3} \\ \rho\theta + \rho^2\theta^2 \pm \sqrt{-3} \\ \rho^2\theta + \rho\theta^2 \pm \sqrt{-3} \end{array}\right] \Rightarrow$$

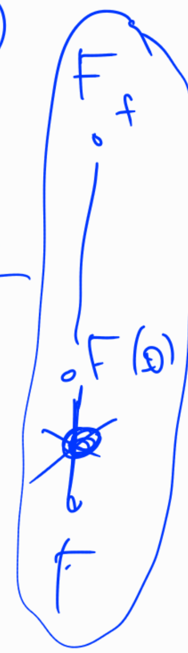
6 צמודים

$$[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 6$$

2. נתון פולינום $f \in F[x]$ ספרבילי מדרגה 4 שממד שדה הפיצול שלו 24.

יהי θ שורש של f. הוכיחו:

$F(\theta)$ אינו מכיל אף תת-שדה ביניים אמיתי.



פתרון: לפנינו פולינום ספרבילי מדרגה 4

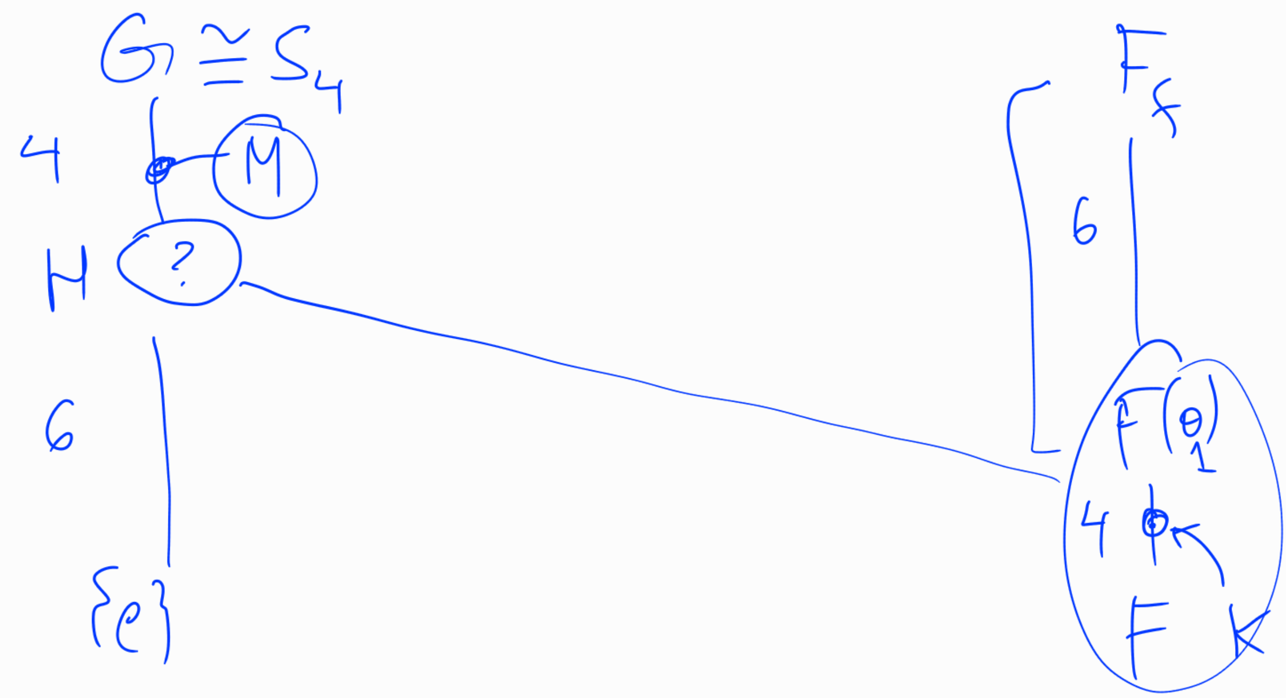
$\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4$

הפעולה של חבורת גלואה G על השורשים:

$$G \hookrightarrow S_4$$

משיקולי ממד:

$$|G| = [F_f : F] = 24$$



$$H = \mathrm{Stab}_G(\theta_1) \cong S_{\{2,3,4\}}$$

לו היה $F \subsetneq K \subsetneq F(\theta) \Leftarrow$

$$S_{\{2,3,4\}} \subseteq M \leq_2 S_4 \quad .$$

$$\Downarrow$$

$$M = A_4$$

ב-S_4 ישנם 6 איברים מסדר 2: $(i\ j)$

אבל, כולם צמודים זה לזה. את הומ'

$S_4 \to \{\pm 1\}$, כולם נשלחים לאותו איבר $\Leftarrow 1$.

וקיבלנו את הומ' הסימן שגרעינו A_4.

ולכן קיבלנו כי $H = S_{\{2,3,4\}}$, ובפרט:

אבל $(2\ 3)$, שהיא תמורה אי-זוגית, משתייכת ל-A_4;

סתירה.

מ.ש.ל.

<u>תרגיל</u> (בית): הוכיחו טענה דומה, לכל n (במקום 4)

③ (ממבחן) יהי E שדה פיצול של $f(x) = x^8 - 2$ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

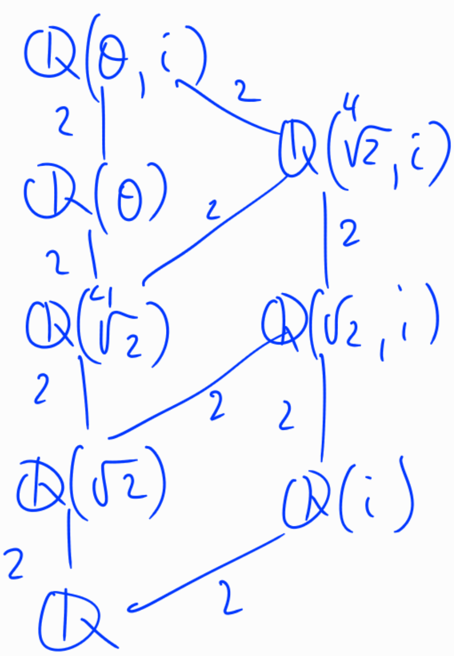
קבעו את ממדו ומצאו קב' יוצרים [illegible] ל-4 תתי-שדות ביניים.

<u>פתרון</u>: f אי"פ מעל $\mathbb{Q}$ (לפי אייזנשטיין):

$$\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q}(\underbrace{\sqrt[8]{2}}_{\theta}, \rho_8) = \mathbb{Q}(\theta, i) \qquad \sqrt{2} = \theta^4$$

$$\rho_8 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})$$

נזכיר כי $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}_f$ ולכן: $E = \mathbb{Q}_f$



מהדיאגרמה:

$$[E : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = [E : \mathbb{Q}(\theta)] \cdot \underbrace{[\mathbb{Q}(\theta) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})]}_{2} = 8$$

ברור שזה הוא 2, כי

$[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$

וגם, לא 1 כי

$\mathbb{Q}(\theta) \subseteq \mathbb{R}$

אך $i \notin \mathbb{R}$.

$8 = \sqrt{2}$ מדרגה θ 8

$\frac{8}{2} = 4$

ונפנה לחבורת גלואה.

$$f = (x^4 + \sqrt{2})(x^4 - \sqrt{2})$$

$\theta, i\theta, -\theta, -i\theta$ נבחר חבורת גלואה כתמורות על

1 2 3 4

ראינו יוצרים שפעולת חב'ת גלוא: לבנג על שורשי

$x^4-\sqrt{2}$,

$$\sigma : (1\ 2\ 3\ 4)$$

$$\sigma(i)=i$$

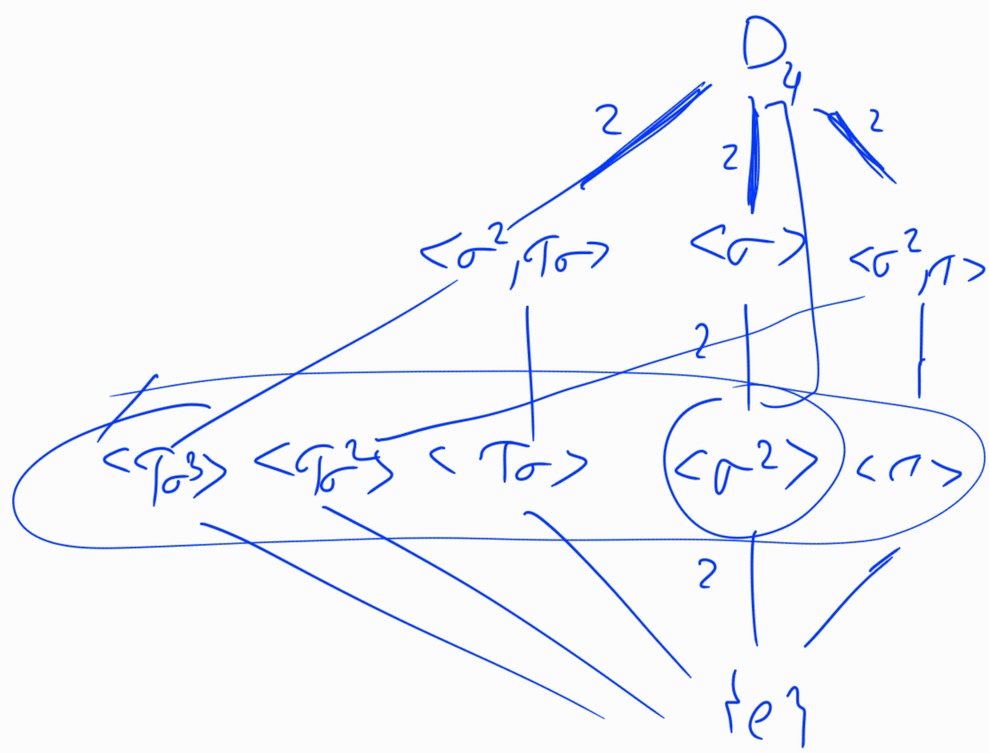
יש לנו הצגה מרוכבת:

$$\tau : (2\ 4)$$

קצת "תיקון" של τ

קיבלנו:

$$\langle \sigma , \tau \rangle = D_4 .$$



E

$\theta, \theta^3, \theta^5, \theta^7,\quad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$

מכונים צמודים

σ^2

5

$\mathbb{Q}(i\sqrt[4]{2})\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)\quad \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = E^{\langle\sigma\rangle}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$