הרצאה 8

דוגמאות

$$f(x,y)=xy+\sin(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y+\cos(x^2+y^2)\,2x$$

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & else\end{cases}$$
$a=(0,0)$
מועמד $L\equiv 0$
$f(h)=f(0)+L(h)+\epsilon(h)||h|| \qquad \epsilon(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$
$$\epsilon(h)=\frac{f(h)}{||h||}=\sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

כלומר f דיפ' ב$a=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$
$$(x,y)\neq 0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\left(-\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

אבל זה לא מוגדר ב$(0,0)$, גם הגבול לא מוגדר.

$$2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$
$$-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}\nrightarrow \text{אין גבול}$$

הגדרות

$U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, נסמן $U\subset_\circ\mathbb{R}^n$ ($\circ$=Open).

$$D(U)=\{\text{כל פונקציות דיפרנציאל ב } \forall u\in U\}$$
$$C(U)=\{\text{כל פונקציות רציפה ב } \forall u\in U\}$$
$$D(U)\subset C(U)$$

פעולות

1. $f(x) \equiv c \quad \forall a \in \mathbb{R}^n: \; df_a(h) \equiv 0$

$$f(a+h) - f(a) = df_a + o(||h||)_{h\to 0} \Rightarrow 0 = c - c = 0 + 0$$

2. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = x \quad df_a(h) = h$

$$a + h - a = h + \epsilon(h)||h|| \qquad \epsilon(h) \equiv 0$$

3. $f(x) = L(x)$ אופרטור ליניארי, $dL_a = L$

$$L(a+h) - L(a) = L(h) + 0$$
$$f(a+h) - f(a) = L(h) + 0$$

4. $m = 1$

$$f(x)g(x)$$
$$d_a(fg)(h) = f(a)dg_a(h) + g(a)df_a(h)$$

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(||h||)_{h\to 0}$$
$$g(a+h) = g(a) + dg_a(h) + o(||h||)_{h\to 0}$$

$$\begin{aligned} &f(a+h)g(a+h) \\ &= f(a)g(a) + \underbrace{f(a)dg_a(h) + g(a)df_a(h)}_{\text{ליניארי}} \\ &+ \underbrace{f(a)o(||h||) + g(a)o(||h||) + df_a(h)o(||h||) + dg_a(h)o(||h||) + o(||h||)o(||h||) + dg_a(h)df_a(h)}_{o(||h||)} \end{aligned}$$

$$||df_a(h)|| \le ||df_a||||h||$$
$$||dg_a(h)|| \le ||dg_a||||h||$$
$$||df_a(h)dg_a(h)|| \le ||df_a||||dg_a||||h||$$
$$df_a(h)dg_a(h) = o(||h||)_{h\to 0}$$

נגזרת מכוונת ונגזרת לפי וקטור

הגדרה

$$f: \underset{\underset{o}{\subseteq \mathbb{R}^n}}{\Omega} \to \mathbb{R}^m$$
$$a \in \Omega$$

נקבע $0 \ne h \in \mathbb{R}^n$

אומרים קיימת נגזרת של f ב-a לפי הווקטור h אם קיים:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{t} := \partial_h f(a)$$

$$\partial_h f(a) = \frac{d}{dt} f(a+th)|_{t=0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_{e_j} f(a)$$

משפט

אם f דיפ' בנקודה a אז לכל $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ קיימת $\partial_h f(a)$ ו-$\partial_h f(a) = df_a(h)$

הוכחה

$$\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \frac{f(a)+t*df_a(h)+o\left(|t|\left||h|\right|\right)-f(a)}{t} = df_a(h) + \frac{o\left(|t|\left||h|\right|\right)}{t}$$

$$\frac{o\left(|t|\left||h|\right|\right)}{t} = \frac{\epsilon\left(|t|\left||h|\right|\right)|t|\left||h|\right|}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

$$\exists \lim_{t\to 0}\frac{t(a+h)-f(a)}{t} = df_a(h) = \partial_h f(a)$$

$m = 1$

$$(\partial_h f)(a) = df_a(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$$

אם f דיפ' ב-a.

דוגמא

$$f(x,y) = \sqrt{\left||xy|\right|}$$
$$a = (0,0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

$$h = (1,1) \qquad \partial_h f(0,0) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\sqrt{|tt|}$$

$$\sqrt{th_1 th_2} = |t|\sqrt{h_1 h_2} = |t|$$

מסקנה: $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ לא דיפ' ב-a.

דוגמא

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & else \end{cases}$$

לא רציף ב-$(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$
$$h = (h_1, h_2)$$
$$(x,y) = t(h_1,h_2) = (th_1, th_2)$$

$$\Omega \coloneqq \{(x,y) \mid x^2 < y < 2x^2\}$$

$$(x,y) \in \Omega \Leftrightarrow x^2 < y < 2x^2 \Leftrightarrow t^2h_1^2 < th_2 < 2t^2h_1^2$$

$$\text{בלי הגבלת הכלליות}: t, h_1, h_2 > 0 \Rightarrow h_2 < 2th_1^2 \wedge t > \frac{h_2}{2h_1^2}$$

$$0 < t < \frac{h_2}{2h_1^2} \Rightarrow (th_1, th_2) \notin \Omega$$

אם $0 < t < \frac{h_2}{2h_1^2}$ אז $f(th_1, th_2) = 0$ ולכן $\lim_{t\to 0}\frac{f(th_1,th_2)-f(0,0)}{t} = 0$

קיבלנו $\forall h \exists \partial_h f(0,0)$ אבל f לא דיפ' ב$(0,0)$ ולא רציפה.

נגזרת מכוונת directional derivative

e כיוון, ניקח $||e|| = 1$.

הגדרה

נגזרת של f בנק' a לפי הכיוון l המוגדר ע"י e.

$$\frac{\partial f}{\partial l}(a) = \partial_e f(a)$$

דוגמא

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = ?$$

l – כיוון – זווית α עם ציר x.

$$e = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = \partial_e f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), e\rangle$$
$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}\cos\alpha + \frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}\sin\alpha$$

e – כיוון המוגדר ע"י $h = (1,1)$

$$\partial_h f(x,y) = \langle \nabla f(x,y), h\rangle$$
$$\frac{\partial f}{\partial l}(x,y) = \langle \nabla f(x,y), e\rangle$$
$$e = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(1,1)}{||1,1||_2}$$

משפט

f דיפ' $(m = 1)$ ב-a, אז $|\partial_e f(a)| \le ||\nabla f(a)||_2 \quad \forall e: ||e||_2 = 1$

הוכחה

$$|\partial_e f(a)| = |\langle \nabla f(a), e\rangle| \le ||\nabla f(a)||_2 ||e||_2 = ||\nabla f(a)||_2$$

נניח $\nabla f(a) \neq 0$. נגדיר $e_0 = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$, אזי

$$\partial_{e_0} f(a) = \langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}\rangle = \frac{1}{||\nabla f(a)||}\langle \nabla f(a), \nabla f(a)\rangle = ||\nabla f(a)||$$

מסקנה

$$e_0 = \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$$

אז לכל $e: ||e||_2 = 1$ מתקיים $|\partial_e f(a)| \le |\partial_{e_0} f(a)|$

יש שוויון אם"ם $e = \pm \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$

כלומר:

$$|\partial_{e_0} f(a)| = \max_{||e||=1} |\partial_e f(a)|$$

מסקנה

גרדיאנט הוא כיוון של שינוי בa המקסימלי.

$\partial_{e_0} f(a) = \langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||} \rangle = ||\nabla f(a)|| > 0$ כלומר עלייה מקסימלית

$\partial_{-e_0} f(a) = -||\nabla f(a)|| \le 0$ כלומר ירידה מקסימלית.

דוגמא

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

(x_0, y_0), מה הכיוון של שינוי מקסימלי?

$$e_0 = \frac{(-2x_0, -2y_0)}{\sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2}}$$

צריך ללכת תמיד בכיוון $(-x_0, -y_0)$