השלמה

תרגיל. חשבו את הגבולות הבאים

1. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{(\ln x)^2}}{e^{\sqrt{x}}}$
2. $\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[x]{2}-1\right)$

פתרון.

.1

$$\frac{e^{\ln^2 x}}{e^{\sqrt{x}}}=e^{\ln^2 x-\sqrt{x}}=e^{\ln^2 x\left(1-\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}\right)}$$

כעת לפי לופיטל

$$\frac{\sqrt{x}}{\ln^2 x}\sim\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{2\ln x}{x}}=\frac{\sqrt{x}}{4\ln x}\sim\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{4}{x}}\to\infty$$

לכן הגבול הוא

$$\text{"}e^{\infty(1-\infty)}\text{"}=0$$

.2

$$x\left(\sqrt[x]{2}-1\right)=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\sim\frac{-2^{\frac{1}{x}}\ln 2\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=2^{\frac{1}{x}}\ln 2\to\ln 2$$

תרגיל. (ממבחן) יהי $n>1$ נניח ש-f מוגדרת וגזירה $n+1$ בסביבת הנקודה 0 וכן $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$ אבל $f^{(n)}(0)=5$ חשבו את $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{(\sin 2x)^n}$

פתרון.

$$\frac{f(x)}{(\sin 2x)^n}=\frac{(2x)^n}{(\sin 2x)^n}\frac{f(x)}{(2x)^n}=\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^n\frac{1}{2^n}\frac{f(x)}{x^n}$$

כעת לפי לופיטל נחשב

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}\sim\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}\sim\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{n(n-1)x^{n-2}}\sim\ldots\sim\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=\frac{5}{n!}$$

לכן הגבול הוא

$$\left(\frac{2x}{\sin 2x}\right)^n\frac{1}{2^n}\frac{f(x)}{x^n}\to 1\cdot\frac{1}{2^n}\frac{5}{n!}=\frac{5}{2^n n!}$$