תרגיל 2

1. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי (X,d). נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x\in X$ ו $n_0\in\mathbb{N}$, כך ש $x_n=x\ \forall n\geq n_0$.
א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
ב. הוכיחו שבמרחב מטרי עם מטריקת $0-1$ כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.

2. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp - אדית באופן הבא: עבור $p\in\mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y)=\max\{i:p^i|(x-y)\}$ ו $d_p(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$.
א. הוכיחו: $p^n\to 0$ במטריקה הp- אדית.
ב. עבור $z\in\mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה לבסוף ששואפת לz במרחב $(\mathbb{Z},d_3)$.

3. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n=(\dfrac{n+1}{n},\dfrac{n+2}{2n},\dfrac{n+3}{3n},...)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

4. נתבונן במרחב (X,d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, וd היא המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$.
א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M,τ) הוא מרחב מטרי ו (Y,τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\}\subseteq Y$ ו $x\in Y$, $x_n\to x$ לפי τ, אמ״ם $x_n\to x$ לפי τ_Y.
ב. נסתכל על הסדרה $x_n=\dfrac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\}\subseteq X$.
ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X.

5. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.
(א) $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}\mid n\in\mathbb{N}\}\to\mathbb{Q}\cap(2021,\infty)$ (המטריקות כאן הן $d(x,y)=|x-y|$)
(ב) $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_7)$

6. יהי (X,d) מרחב מטרי.
(א) הוכיחו כי לכל $x\in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X.

(ב) הוכיחו שסעיף א' נכשל אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.

(ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.

7. הוכיחו שבמרחב $(\mathbb{Z}, d_p)$ כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0,r)$ הוא קבוצה סגוחה (כלומר, גם סגורה וגם פתוחה) ותת חבורה.

8. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל $\mathbb{R}$. המטריקה היא $d(a_n, b_n) = \frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m \neq b_m$. (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).

(א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות המתחילות ב $0,1,2$ או ב $3,4,5,6$ היא קבוצה פתוחה.

(ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.

9. הוכיחו/הפריכו: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ועל, אז $(\mathbb{R}, d_f)$ הוא מרחב שלם, כאשר $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$

10. הוכיחו/ הפריכו: המרחבים הבאים שלמים:

(א) מרחב כל הסדרות הממשיות המתאפסות לבסוף, עם מטריקת הסופרימום.

(ב) $\mathbb{R}^N$ עם המטריקה: $d((x_1,...,x_N),(y_1,...,y_N)) = \max_i |x_i - y_i|$