תרגיל 5

להגשה עד 6.12.15

שאלה 1

תהי $(\mathbb{X},\cdot)$ חבורה סופית. לכל $E\subseteq\mathbb{X}$ ו־ $a\in\mathbb{X}$ תהי:

$$a\cdot E:=\{a\cdot x:\ x\in E\}$$

(ההזזה של E על ידי a.)

הוכיחו **קיום** מידה חיובית **יחידה** μ מעל $\mathbb{P}(\mathbb{X})$ כך ש: $\mu(\mathbb{X})=1$ ולכל $E\subseteq\mathbb{X}$:

$$\mu(a\cdot E)=\mu(E).$$

הערה: μ כזו נקראת אינוריאנטית תחת הזזות.

שאלה 2

תנו דוגמא **לאי קיום** משפט ההתכנסות המונוטונית עבור סדרה **יורדת** של פונקציות מדידות ואי שליליות.

שאלה 3

יהיו $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית, $E\in\mathbb{A}$ כך ש: $\mu(E)>0$ וגם: $\mu(\mathbb{X}\setminus E)>0$.

נגדיר סדרה $f_n:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ על ידי: לכל $k\in\mathbb{N}$:

$$f_{2k}:=\mathbf{1}_{E^c}$$
$$f_{2k-1}:=\mathbf{1}_{E}$$

הראו כי מקרה זה מהווה דוגמא לאי שוויון חד בלמה של פאטו.

שאלה 4

תהי $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות מדידות אי שליליות מעל מרחב מידה חיובית $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$.

הוכיחו:

1. אם $f_n\searrow f$ וקיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש: $\int_{\mathbb{X}}f_N d\mu<\infty$ אזי: $\int_{\mathbb{X}}f_n d\mu\to\int_{\mathbb{X}}f d\mu$.
2. אם $f_n\to f$ ולכל $n\in\mathbb{N}$: $f_n\le f$ אזי: $\int_{\mathbb{X}}f_n d\mu\to\int_{\mathbb{X}}f d\mu$.

בהצלחה!!