משוואות דיפרנציאליות (לינאריות) מסדר גבוה (סדר שני)

משפט (קיום ויחידות)

תהי בעיית קושי בצורה נורמלית:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \\ y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

כאשר f רציפה בסביבה של הנקודה $(x_0, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ ומקיימת את תנאי ליפשיץ ביחס ל – $\left(y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right)$ ב - $\mathbb{R}^{n-1}$, כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$ קבוע, מתקיים:

$$|f(x, b_0, b_1, \cdots, b_{n-1}) - f(x, c_0, c_1, \cdots, c_{n-1})| \leq L \cdot \left\|b_0 - c_0, b_1 - c_1, \cdots, b_{n-1} - c_{n-1}\right\|$$

אזי, **קיים** פתרון **יחיד** לבעיית קושי.

הגדרה

ניקח משוואה לינארית כללית מסדר n:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y + b(x)$$

אם $b(x) \equiv 0$ (או ש – $y(x) \equiv 0$ פתרון למשוואה), המשוואה נקראת **לינארית הומוגנית**.

משפט

1. הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית מסדר n מהווים מרחב ווקטורי n מימדי.
2. הפתרון הכללי למשוואה לינארית אי הומוגנית הוא מהצורה $y = y_h + y_p$, כאשר y_h הוא פתרון כללי למשוואה ההומוגנית המתאימה, ו - y_p פתרון פרטי למשוואה האי הומוגנית.

הוכחה

1. <u>מרחב ווקטורי</u>

עפ"י ההגדרה, $y(x) \equiv 0$ פתרון למשוואה ההומוגנית.

אם y_1, y_2 פתרונות למשוואה ההומוגנית, אזי לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2$ פתרון למשוואה ההומוגנית, עפ"י לינאריות הנגזרת:

$$y_1^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y_1^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y_1^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y_1' + a_0(x) \cdot y_1$$

$$y_2^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y_2^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y_2^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y_2' + a_0(x) \cdot y_2$$

$$\Downarrow$$

$$(y_1 + y_2)^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot (y_1 + y_2)' + a_0(x) \cdot (y_1 + y_2)$$

<u>n מימדי</u>

עפ״י משפט קיום ויחידות, קיים יחס של אחד לאחד בין פתרונות לתנאי התחלה ב - x_0.
תנאיי ההתחלה האפשריים $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1})$ מהווים מרחב ווקטורי n מימדי, וההעתקה בין פתרונות לבין תנאי התחלה היא איזומורפיזם של מרחבים ווקטוריים.
כלומר, אם ניקח פתרונות $\{y_1, \cdots, y_n\}$ המקיימים:

$$y_1(x_0) = 1 , y_1'(x_0) = 0 , \cdots , y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$y_2(x_0) = 0 , y_2'(x_0) = 1 , \cdots , y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$y_n(x_0) = 0 , y_n'(x_0) = 0 , \cdots y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

אזי, $\{y_1, \cdots, y_n\}$ בסיס למרחב הפתרונות.

■

דוגמה

$$\boxed{y'' = -y}$$

פתרון כללי למשוואה:

$$y = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)$$

תנאי התחלה ב - $x_0 = 0$:

$$\sin(0) = 0 , \cos(0) = 1$$
$$\sin(0)\,' = 1 , \cos(0)' = 1$$
$$\Downarrow$$
$$y = y(0) \cdot \sin(x) + y'(0) \cdot \cos(x)$$

■

2. $y - y_p$ פותר את המשוואה ההומוגנית (עפ״י לינאריות הנגזרת), לכן $y = y_p + y_h$.

■

דוגמה

$$\boxed{y'' = -y + 10}$$

ניקח:

$$y_p = 10$$

עפ"י המשפט:

$$y = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x) + 10$$

$$\blacksquare$$

הערה

תלות לינארית של $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ $\Leftrightarrow$ קיימים $c_1, c_2, \cdots, c_n$, לא כולם 0, כך שלכל x בתחום, $c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \cdots + c_n \cdot y_n = 0$.

דוגמה

$$y_1(x) := x$$

$$y_2(x) := |x|$$

$\{y_1, y_2\}$ תלויות לינארית בתחום $[0,1]$, אך אינן תלויות לינארית בתחום $[-1,1]$.

הגדרה

בהינתן משוואה לינארית הומוגנית מסדר n וקבוצת פתרונות $\{y_1, \cdots, y_n\}$, נגדיר את הדטרמיננטה:

$$\boxed{\mathcal{W}(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}$$

למה

אם $\{y_1, \cdots, y_n\}$ תלויים לינארית, אזי העמודות תלויות לינארית בכל x בתחום, לכן לכל x בתחום: $\mathcal{W}(x) = 0$.

משפט

אם $\mathcal{W}(x) = 0$ בנקודה אחת, אזי $\mathcal{W}(x) = 0$ בכל התחום.

משפט (אבל)

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\mathcal{W}}{dx} = a_{n-1}(x) \cdot \mathcal{W}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)\, dt}$$

הוכחה

עפ"י הגדרת הדטרמיננטה וכלל השרשרת:

$$\mathcal{W}'(x) = \overbrace{\begin{vmatrix} y_1{}'(x) & y_2{}'(x) & \cdots & y_n{}'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}^{0} + \overbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}^{0} + \cdots + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

נציב את המשוואה:

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y$$

ונצמצם את כל המכפלות של השורות העליונות, כדי לקבל:

$$\mathcal{W}'(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}(x) \cdot y_1^{(n-1)}(x) & a_{n-1}(x) \cdot y_2^{(n)-1}(x) & \cdots & a_{n-1}(x) \cdot y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{W}'(x) = a_{n-1}(x) \cdot \mathcal{W}'(x)$$

■