מבוא לאלגברה לניארית 89119

סמסטר א תשע"ח

פתרון שאלה 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & k & -1 \\ 2 & k & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 2 \\ 2 & k & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 = R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 2 \\ 0 & k & 5 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = 2R_3 - kR_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 2 \\ 0 & 0 & 10-k(k+3) & 4-2k \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{4-2k} \qquad \underbrace{-k^2-3k+10}$$

א. אם המקדם $-k^2-3k+10$ מתאפס והמקדם $4-2k$ לא מתאפס אז נקבל שורת סתירה. לכן $k=-5$ אין פתרון.

ב. כאשר $k=2$ מקבלים שורת אפסים ז"א אינסוף פתרונות.

ג. פתרון יחיד כאשר $k \neq 2,-5$

ד. הפתרון הכללי יהיה: .

$$(k-2)(k+5)\cdot z = 4-2k$$

$$z = \frac{-2(2-k)}{\cancel{(k-2)}(k+5)} = \boxed{-\frac{2}{k+5}}$$

נציב במשוואה השלישית

פתרון כללי

$$\boxed{\left(-3\left(1+\frac{2}{k+5}\right);\ 1+\frac{k+3}{k+5};\ \frac{-2}{k+5}\right)}$$

נציב במשוואה השניה:

$$2y + k+3\cdot\left(\frac{-2}{k+5}\right) = 2$$

$$2y = 2 + 2\frac{(k+3)}{k+5} \Rightarrow y = \boxed{1+\frac{k+3}{k+5}}$$

$$x - 3\left(\frac{-2}{k+5}\right) = -3$$

$$x = -3 + 3\frac{(-2)}{k+5} = -3 - \frac{6}{k+5}$$

פתרון שאלה 2

שאלה 2 א.

כדי למצוא עבור אילו ערכי x המטריצה A הפיכה, עלינו לדרוש את $|A| \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} x-1 & 3 & -3 \\ 0 & x+2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (x-1)\left[(x+2)-3\right] + 0\cdot\left[3-3\right] + 1\left[\underbrace{-9+\overbrace{3(x+2)}^{3x+6}}_{3x-3}\right] =$$

$$= (x-1)(x-1) + 3x-3 =$$

$$(x-1)^2 + 3(x-1) \neq 0$$

עבור $x \neq 1$ המטריצה הינה הפיכה,

שאלה 2 ב:

$A^{3\times3}$; $|A| = -4$

i. $|2A^{-1}| = 2^3|A^{-1}| = 2^3\cdot|A|^{-1} = 8\cdot(-4)^{-1} = 8\cdot\frac{1}{-4} = -2$

ii. $|A^3| = |A|^3 = (-4)^3 = -64$

פתרון שאלה 3

שאלה 3:

צריכים למצוא פעולות אלמנטריות עלמנות
להעביר ממטריצה A למטריצה B:

$$\overset{A}{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} \xrightarrow[E_1]{R_2 \leftarrow R_2\cdot 2} \begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[E_2]{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \leftarrow 4R_3 \\ E_3}]{} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix} \xrightarrow[E_4]{R_3+3R_1 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&0&4\end{pmatrix} = B$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow 2R_2} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E_1$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = E_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow 4R_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix} = E_3$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+3R_1 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix} = E_4$$

$$E_4\cdot E_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&4\end{pmatrix}$$

$$E_4\cdot E_3\cdot E_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\3&-3&4\end{pmatrix}$$

$$E_4\cdot E_3\cdot E_2\cdot E_1 = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\3&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2&0\\0&2&0\\3&-6&4\end{pmatrix}\cdot \overset{A}{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} = \overset{B}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\3&0&4\end{pmatrix}}$$

בדיקה

לכן מה שמצאנו היה נכון.

פתרון שאלה 3

סעיף ב'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow \frac{1}{4} R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \longleftarrow R_2 \cdot \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

לכן

$$\overset{F_4}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{F_3}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{F_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}} \cdot \overset{F_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot B = A$$

פתרון שאלה 4

פתרון שאלה 4

קודם כל נראה שהיא הפיכה ע"י חישוב ה $|A|$.

$$|A| = 1\cdot[1\cdot -7 - -2\cdot 2] + -1[1\cdot -2 - 2\cdot 1] = (1\cdot(-3)+4) = 1 \neq 0$$

לכן A הפיכה:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3]{R_1 \leftarrow R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

לכן

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 11 & -5 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$