פתרון תרגיל 7

.1

נשתמש במבנה הנתונים Find-Union במימוש המתקדם ביותר שראינו (כיווץ מסלולים ואיחוד לפי גודל), כך ששורש כל עץ הפוך יחזיק בשדה נוסף max -את האיבר המקסימלי בקבוצתו.

Find(i)- כמו קודם .

Max(i)-נבצע Find(i) ונחזיר את ערך השדה max שבשורש

Union(p,q)-נבצע Union כרגיל ונעדכן את שדה max בשורש העץ החדש להיות הערך המקסימלי מבין שני ערכי שדות ה max של הקבוצות p,q .

סיבוכיות הזמן המשוערכת של שלושת הפעולות ביחד הינה O(log*n) .

.2

לפי אלגוריתם הכנסה והוצאת מינימום מערימת פיבונאצ'י.

.3 כיוון להוכחה:

נחליף כל קשת ממשקל i במסלול פשוט שאורכו i שמשקל כל קשת בו היא 1.על הגרף הזה נריץ BFS.

יש לכתוב הוכחת נכונות!

.4 תיקון לשאלה: הגרף מכוון.

הוכחה: תחילה נציין שהגרף חסר מעגלים, ובפרט אין בגרף מעגל בעל משקל שלילי, ולכן ניתן לחשב את המסלול הקצר ביותר לגרף הנ"ל.

על מנת להראות שהאלגוריתם עובד, נראה שהמרחק לפי אלגוריתם דייקסטרה הוא אכן המרחק המינימלי לכל קודקוד $v\in V$ כאשר אנו מוסיפים את הקודקוד לקבוצה S (הקבוצה של הקודקודים שכבר עשינו הקלה דרכם).

נניח s,....u,v הוא המסלול הקצר ביותר בין s לv כך שu הוא הקודקוד שקודם לv במסלול. נרצה לוודא שu∈S. אם u=s אזי בטוח שu∈S.עבור כל שאר הקודקודים הגדרנו שהקודקוד הבא שיכנס לS יהיה הקודקוד שהכי קרוב לs אבל לא בS.כיוון ש d[v]=d[u]+w(u,v) ומתקיים שw(u,v)>0 עבור כל הקודקודים מלבד אולי הקודקודים שיוצאים מהמקור, u בהכרח בS כיוון ש u יותר קרוב לs.

.5

תיאור האלגוריתם:

נריץ את בלמן פורד,אך במקום לבצע |V|-1 איטרציות בלולאה, נבצע רק m איטרציות.

בנוסף, ניתן לוותר על שלב בדיקת קיום מעגלים שליליים מכוונים- שכן נתון לנו שאין מעגלים כאלה.

הוכחת נכונות:

באיטרציה הראשונה של הלולאה באלגוריתם נמצא את המסלולים הקצרים ביותר במרחק קשת מ-S.

באיטרציה השנייה מתקיימת הקלה משפרת לקודקודים שנמצאים במרחק 2 קשתות לכל היותר מ- s.

כך ממשיכים עד האיטרציה ה-m.

לאחר איטרציה הנ"ל לא נשפר מסלול, כיוון שנתון שלכל קודקוד מסלול הקצר ביותר מ- s מכיל לכל היותר m קשתות.

זמן ריצה:

כל איטרציה הלולאה עוברת על כל הקשתות, מבצעים m אטרציות ולכן סה"כ נקבל $O(m*|E|)$.