חומר לבוחן: עד תת-חבורות נורמליות, כולל וכולל כל מה שנאמר בהרצאה
על הנושאים שתרגלנו. 3 שאלות 80 דקות. עד תרגיל 8 כולל

תזכורת:

יהי G חבורה ו- $H \le G$. אז H היא תת חבורה "נורמלית" אם לכל $g\in G$
$gH = Hg$

באופן שקול: לכל $g\in G$, $gHg^{-1}\subseteq H$. כלומר לכל $g\in G$, $h\in H$ $ghg^{-1}\in H$

הוכחה לשקילות:

$gH=Hg \iff gHg^{-1}=H$ לכן $2 \Leftarrow 1$

$1 \Leftarrow 2$: יהי $g\in G$ $gHg^{-1}\subseteq H$. ניקח $x=g^{-1}$, $xHx^{-1}\subseteq H \Leftarrow H\subseteq gHg^{-1}$
הכלה דו כיוונית ולכן שיוויון.

דוגמא:

תהי G חבורה. נגדיר $T=\prod_{\mathbb{N}} G=(\dots)$ $\quad H\le T=\{(\dots) \mid$ חוץ ממספר סופי של איברים בוקטור כל הרכיבים הם $e\}$

הוכיחו ש: $H\trianglelefteq T$

הוכחה:

יהי $h\in H$, $t\in T$. $h=(g_1,\dots,g_n,e,\dots)$. $t=(g_1',\dots,g_n',e,\dots)$

$$t^{-1}ht=(g_1'^{-1},\dots,g_n'^{-1},e,\dots)(g_1,\dots,g_n,e,\dots)(g_1',\dots,g_n',e,\dots)=$$
$$=(g_1'^{-1}g_1g_1',\dots,g_n'^{-1}g_ng_n',e,\dots)\in H$$

הערות:

1) תת חבורות מאינדקס 2 היא תמיד תת חבורה נורמלית

2) אם $f:G\to H$ הומו' אז $\ker f\trianglelefteq G$

3) בחבורה אבלית כל תת חבורה היא נורמלית

דוגמא נגדית: (ל-1)

$G=S_3$ $\quad |S_3|=6$ $\quad g=(1,2)$, $H=\langle(1,2)\rangle=\{(1,2),id\}$, $h=(1,3)$

$(1,3)(1,2)(1,3) = (2,3) \notin H$

תרגיל:

אם $H \trianglelefteq G$ ו- $K \trianglelefteq H$. האם $K \trianglelefteq G$?

פתרון:

ניקח $G = D_4$, $H = <\sigma>$, $K = <\sigma^2>$

$$(\tau^i\sigma^j)\sigma^2(\tau^i\sigma^j)^{-1} = \tau^i\sigma^{j+2}\sigma^{4-j}\tau^i = \tau^i\sigma^2\tau^i = \tau^i\tau^i\sigma^2 = \sigma^2$$

לא עובד.

ניקח $H = <\tau, \sigma^2>$ תת חבורה מאינדקס 2 ולכן היא נורמלית ב- G

$K = <\tau>$ $[H:K] = 2$ ולכן $K \trianglelefteq H$

$\sigma\tau\sigma^3 = \tau\sigma^3\sigma^3 = \tau\sigma^2 \notin K$

הערה: אם $H \leq G$ ו- $K \trianglelefteq G$ ובנוסף $K \subseteq H$ אז $K \trianglelefteq H$

תרגיל:

תהי G $(|G| \geq 3)$ חבורה שפועלת על X ונניח שיש $x \in X$ כך ש $|orb(x)| = 2$

הוכיחו שב- G יש תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית

פתרון:

לפי משפט מסלול - מייצב $[G:Stab(x)] = |orb(x)|$, $Stab(x) \leq G$

ונקבל שזאת תת חבורה מאינדקס 2. לכן $Stab(x)$ הוא תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

תרגיל:

p-ראשוני. תהי $|G| = p^n$ ו- $H \trianglelefteq G$ $|H| = p$. הוכיחו $H \subseteq Z(G)$

פתרון:

יהי $h \in H$. רוצים להוכיח ש $conj(h) = \{h\}$

H נורמלית (סגורה להצמדות) ולכן $conj(h) \subseteq H$. ידוע ש $|conj(h)| \mid |G|$

ולכן $|conj(h)| = p^k$ ומכיוון ש $conj(h) \subseteq H$ אז $|conj(h)| = 1 \vee p$

אם $h=e$, אז $conj(h)=\{h\}$ (ברור)

אחרת, נניח בשלילה ש $conj(h)\neq\{h\}$ ולכן $|conj(h)|=p$

מכיוון ש $conj(h)\subseteq H$ ו- $|H|=p$. נקבל: $conj(h)=H$, $e\in H$ ולכן $e\in conj(h)$

כלומר, קיים $g\in G$ כך ש $g^{-1}hg=e$ $\Leftarrow$ $h=geg^{-1}=e$ בסתירה

לכן, $conj(h)=\{h\}$. כלומר $h\in Z(G)$

חבורת התמורות הצוגיות (החילופין):

$G=S_n$. לכל איבר ב- S_n ניתן להתאים סימן: 1 או -1. באופן הבא:

$sign(a_1,\dots,a_n)=(-1)^{n-1}$

בנוסף:

$sign(\sigma)sign(\tau)=sign(\sigma\tau)$

הסימן מגדיר הומ' $f: S_n \to \{-1,1\}=\Omega_2$ $\quad ker\, f=ker(sign)=A_n$

כל התמורות מסימן 1. $|A_n|=\frac{n!}{2}$

דוגמה:

$A_3=\{id,(1,2,3),(1,3,2)\}$

תזכורת:

ב- S_n שתי תמורות צמודות $\Longleftrightarrow$ יש להם את אותו מבנה מחזורים

האם הטענה נכונה גם ב- A_n? (כלומר, האיבר המצמיד צריך לבוא מ- A_n)

$\sigma,\tau\in A_n$ אותו מבנה מחזורים. קיים $g\in S_n$. כך ש: $g^{-1}\sigma g=\tau$

פתרון:

לא. לדוגמה, A_3 היא חבורה עם 3 איברים ולכן ציקלית ולכן אבלית. בחבורה אבלית

כל איבר צמוד רק לעצמו

טענה:

A_n נוצרת על ידי מחזורים מאורך 3

הוכחה:

כזכור, כל איבר ב-S_n הוא מכפלה של חילופים. יהי $\sigma\in A_n$. $\sigma=(\ ,\ )(\ ,\ )\dots(\ ,\ )$

מספר החילופים חייב להיות זוגי כי הסימן של חילוף הוא -1

$(a,b)(a,b)$ - מצמצמים

$(a,b)(b,c)$ - (a,b,c)

$(a,b)(c,d)$ - $(a,b,c)(b,c,d)$

עידון הטענה: למעשה A_n נוצרת ע"י מחזורים מהצורה $(1,a,b)$

הוכחה: תהי (a,b,c) שלשה. אם יש בה את 1 סיימנו

אחרת, $(a,b,c)=(1,a,b)(1,b,c)$

עידון לעידון הטענה: A_n נוצרת ע"י מחזורים מהצורה $(1,2,a)$

$(1,i,j)=(1,2,j)^{-1}(1,2,i)(1,2,j)$

חבורות מנה:

תהי G חבורה ו- $H\trianglelefteq G$. ניתן להפוך את קבוצת המנה $G/H=\{gH\mid g\in G\}$ לחבורה. הפעולה היא הכפלה של נציגים. כלומר, $(g_1H)(g_2H)=(g_1g_2)H$

כאשר H נורמלית ב- G, יוצא שהפעולה לא תלויה בבחירת הנציגים

איבר היחידה ב- G/H הוא הקוסט $eH=H$

חשוב לזכור: $g\in H \Leftarrow gH=H$

דוגמאות:

1) $G=\mathbb{Z}$, $H=n\mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{0+n\mathbb{Z},\dots,n-1+n\mathbb{Z}\}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}_n$

2) $G=D_n$, $H=\langle\sigma\rangle$ $\Leftarrow$ $\underbrace{D_n/\langle\sigma\rangle\cong\mathbb{Z}_2,}_{\text{כי הגודל הוא 2}}$ $D_n/\langle\sigma\rangle=\{\langle\sigma\rangle,\tau\langle\sigma\rangle\}$

3) $G=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $H=\mathbb{R}\times\{0\}$ $G/H\cong\mathbb{R}$, $G/H=\{\mathbb{R}\times\{0\},(0,r)+H\}$

כל האיברים הם מהצורה (s,r), $(s,r)\sim_H(0,r)$ כי $(s,r)-(0,r)=(s,0)\in H$

בנוסף אם $r_1\neq r_2$ אז $(0,r_1)\nsim_H(0,r_2)$. $(0,r_1)+H+(0,r_2)+H=(0,r_1+r_2)+H$

הפעולה בדיוק כמו ב- $\mathbb{R}$

4) $G=\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$, $H=<(1,1)>$. אפשר לקחת נציגים $(0,0),(0,1),(0,2),(0,3)$

$(0,y-x)\sim(x,y)\in\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4$
(ההפרש שייך ל-H)

נשים לב ש $(0,1)+H$ הוא מסדר 4

$n(0,1)+H=(0,n)+H$

$(0,n)+H=H \iff (0,n)\in H \iff n\equiv 0 \mod 4$

האיבר הכי קטן שקיים - 4. לכן $G/H\cong\mathbb{Z}_4$

תרגיל:

אם G אבלית אז G/H אבלית

פתרון:

$G/H=\{gH\}$

G אבלית $g_1g_2=g_2g_1 \Leftarrow$
$(g_1H)(g_2H)=g_1g_2H$
$(g_2H)(g_1H)=g_2g_1H$

הערה: ייתכן ש G לא אבלית אבל G/H כן.
$G=D_4$ אבלית אבל $D_4/<\sigma>\cong\mathbb{Z}_2$ כן אבלית

תרגיל:

אם G ציקלית אז G/H ציקלית

הוכחה:

$G=<a>$ יהי $gH\in G/H$, $g=a^i \Rightarrow gH=(aH)^i$

תרגיל:

תהי G חבורה, ו- $H\trianglelefteq G$, ו- $[G:H]=n$. אז לכל $g\in G \Rightarrow g^n\in H$

פתרון:

H נורמלית, ולכן יש חבורת מנה G/H. $|G/H|=n$

ממסקנת לגראנז'. יהי $gH\in G/H$ אז $(gH)^n=\underbrace{H}_{\text{איבר היחידה}}$,

$(gH)^n=g^nH=H\Rightarrow g^n\in H$