פתרון משוואות קוואזי ליניאריות מסדר I

תזכורת:

מד"ח ליניארית –

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$$

משוואת קוואזי ליניארית –

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

פתרון לפי שיטת לגרנז':

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

שיטת לגרנז' –

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{du}{c(x,y,u)}$$

ע"י פתירת שניים מהמשוואות הנ"ל מקבלים:

$$\phi_2(x,y,u) = c_2 \,, \phi_1(x,y,u) = c_1$$

הפתרון הכללי של מד"ח קוואזי ליניארית היא מהצורה $F(\varphi_1,\varphi_2) = 0$ כאשר F פונקציה גזירה כלשהי. בדרך נוספת:

$$(*) \begin{cases} F(\phi_1) = \phi_2 \\ \text{או} \\ F(\phi_2) = \phi_1 \end{cases}$$

ב - $(*)$ נשתמש כאשר $\phi_1(x,y)$ כלומר פונקציה במשתנים של רק x,y, כנ"ל עבור ϕ_2.

לעומת זאת, אם $\phi_2(x,y,u)$, אז: $F\big(\phi_1(x,y)\big) = \phi_2(x,y,u)$.

הערה:

אם $c(x,y,u) = 0$ אז נוכל לכתוב –

$$\phi_2(x,y,u) = c_2 = u \text{ או } \phi_1(x,y,u) = c_1 = u$$

תרגיל:

פתרו את המד"ח:

$$yu_x - xu_y = 0$$

פתרון:

$$a = y \,, b = -x, c = 0$$

לפיה ההערה מאחר ו - $c = 0$, אז נבחר $\phi_1 = u = c_1$.

משיטת לגרנז':

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

$$\frac{dy}{-x} = \frac{dx}{y}$$

$$\int -x\,dx = \int y\,dy$$

$$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c_2$$

$$-x^2 = y^2 + c_2^*$$

$$-c_2^* = x^2 + y^2$$

$$\boxed{\phi_2 = c_2 = x^2 + y^2}$$

הפתרון הכללי:

$$F(\phi_1, \phi_2) = 0 \Rightarrow F(u(x,y), x^2 + y^2) = 0$$

לפי $(*)$ נקבל ש - $F(x^2 + y^2) = u$, כי ϕ_2 לא תלויה ב $- u$.

שיטת לגרנז' נועדה כדי למצוא פתרון כללי. בנוסף, בהינתן תנאי התחלה ניתן יהיה למצוא פתרון פרטי:

$$F(x^2 + y^2) = u$$

ונניח שנתון תנאי ההתחלה: $u(x,0) = x^2$.

נמצא פתרון פרטי:

$$x^2 = u(x,0) = F(x^2)$$

אם נסמן $x^2 = t$, קיבלנו $F(t) = t$.

נחזור לפתרון הכללי:

$$u(x,y) = F(x^2 + y^2) = x^2 + y^2$$

ולכן $u(x,y) = x^2 + y^2$ הוא פתרון פרטי.

■

<u>תרגיל:</u>

נתונה המד"ח:

$$\begin{cases} (1 + x^2)z_x + xyz_y = 0 \\ z(0,y) = y^2 \end{cases}$$

א) מצא פתרון כללי.

ב) מצא פתרון פרטי.

פתרון:

א) המקדמים:

$$a = 1 + x^2 \, , b = xy \, , c = 0$$

אכן $c = 0$ ולכן: $\phi_1 = c_1 = z(x, y)$

נמצא את ϕ_2 ע"י שיטת לגרנז':

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}$$

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{xy}$$

$$\int \frac{2x}{1 + x^2} dx = \int \frac{2}{y} dy$$

$$\ln(1 + x^2) = 2\ln(y) + \tilde{c}_2$$

$$\ln\left(\frac{1 + x^2}{y^2}\right) = \tilde{c}_2$$

$$c_2 = \frac{1 + x^2}{y^2} = \phi_2$$

קיבלנו פתרון כללי (כאשר $y \neq 0$):

$$F\left(z, \frac{1 + x^2}{y^2}\right) = 0$$

או

$$F\left(\frac{1 + x^2}{y^2}\right) = z$$

ב) נמצא פתרון פרטי מתנאי ההתחלה $z(0, y) = y^2$:

$$y^2 = z(0, y) = F\left(\frac{1}{y^2}\right) \underset{t = \frac{1}{y^2}}{\Longrightarrow} F(t) = \frac{1}{t}$$

נחזור לפתרון הכללי:

$$z = F\left(\frac{1 + x^2}{y^2}\right) = \frac{y^2}{1 + x^2}$$

לכן, פתרון פרטי הוא: $z = \frac{y^2}{1+x^2}$.

■

תרגיל:

מצאו פתרון כללי למד"ח:

$$xu_x + yu_y = 1$$

פתרון:

$$a = x\,, b = y\,, c = 1$$

נפתור עם שיטת לגרנז':

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{1}$$

בחרנו את המשוואות:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln(x) = ln(y) + \tilde{c}_1 \Rightarrow \tilde{c}_1 = \ln\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow c_1 = \frac{x}{y} = \phi_1(x,y)$$

$$\Rightarrow \ln(x) = u + \tilde{c}_2 \Rightarrow c_2 = \ln(x) - u = \phi_2(x,u)$$

פתרון כללי:

$$F\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - u$$

$$\boxed{u = \ln(x) - F\left(\frac{x}{y}\right)}$$

■

הערה:

בבחירה של 2 שוויונות מתוך 3 בשיטת לגרנז', נרצה שב - c_1 או ב - c_2 יופיע u אבל לא בשניהם.

משפט: אם $u_j(x_1, \dots, x_n, z) = c_j$ עבור $j = 1, \dots, n$ פתרונות בלתי תלויים של המשוואות:

$$\frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \cdots \frac{dx_n}{p_n} = \frac{dz}{R}$$

אזי עבור פונקציה ϕ גזירה כלשהי של n משתנים, המשוואה: $\phi(u_1, u_2, \dots u_n) = 0$ היא פתרון כללי של המד"ח:

$$p_1 \cdot \frac{\partial z}{\partial x_1} + p_2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + p_n \cdot \frac{\partial z}{\partial x_n} = R$$

כאשר $p_1, \dots, p_n$ פונקציות נתונות כלשהן של המשתנים $x_1, x_2, \dots, x_n, z$.

<u>תרגיל:</u>

נתונה המד"ח:

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + \frac{z}{2}u_z = 0 \\ u(1, y, z) = y + z^2 \end{cases}$$

א) מצאו פתרון כללי.

ב) מצאו פתרון פרטי.

<u>פתרון:</u>

א) המקדמים הם:

$$a(x, y, z, u) = x \,, b(x, y, z, u) = y \,, c(x, y, z, u) = \frac{z}{2} \,, d(x, y, z, u) = 0$$

לכן נוכל לבחור: $c_1 = \phi_1(x, y, z, u) = u(x, y, z)$.

משיטת לגרנז':

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{z}{2}}$$

נבחר:

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow c_2 = \frac{x}{y} \\ \frac{dx}{x} = 2\frac{dz}{z} \Rightarrow c_3 = \frac{x}{z^2} \end{cases}$$

<u>פתרון כללי:</u>

$$\phi(c_1, c_2, c_3) = 0$$

$$\boxed{\phi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z^2}\right) = u(x, y, z)}$$

ב) כעת נציב תנאי התחלה:

$$y+z^2=u(1,y,z)=\phi\left(\frac{1}{y},\frac{1}{z^2}\right)$$

לכן נסמן: $t_1=\frac{1}{y}$ וגם $t_2=\frac{1}{z^2}$ וקיבלנו:

$$\phi(t_1,t_2)=\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}$$

נחזור לפתרון הכללי ונקבל:

$$u(x,y,z)=\phi\left(\frac{x}{z},\frac{x}{z^2}\right)=\frac{y}{x}+\frac{z^2}{x}=\frac{y+z^2}{x}$$

ולכן $u(x,y,z)=\frac{y+z^2}{x}$ הוא פתרון פרטי.

■

תרגיל ממבחן:

מצא פתרון כללי למד"ח:

$$(y^2-u)u_x+y\cdot u_y=u$$

פתרון:

המקדמים הינם:

$$a=y^2-u\,,b=y,c=u$$

נשתמש בשיטת לגרנז':

$$\frac{dx}{y^2-u}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{u}$$

נבחר 2 משוואות:

$$\begin{cases} \frac{dy}{y}=\frac{du}{u}\Rightarrow \tilde{c}_1=\frac{y}{u}\Rightarrow c_1=\frac{u}{y}\,,u=c_1y \\ \frac{dx}{y^2-u}=\frac{dy}{y}\Rightarrow\frac{dx}{y(y-c_1)}=\frac{dy}{y}\Rightarrow x=\frac{y^2}{2}-c_1y+c_2 \end{cases}$$

הערה: לא נשארים עם c_1 ו - c_2 באותה משוואה אלא מציבים בחזרה c_1.

לכן:

$$x=\frac{y^2}{2}-u+\tilde{c}_2\Rightarrow 2x=y^2-2u+c_2$$

$$\boxed{c_2=\phi_2=2x-y^2+2u}$$

$$\boxed{c_1 = \phi_1 = \frac{u}{y}}$$

ולכן הפתרון הכללי הינו:

$$F\left(\frac{u}{y}, 2x - y^2 + 2u\right) = 0$$

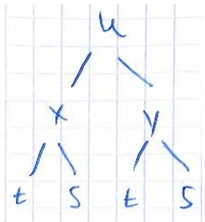
■

שיטת קווים אופיינים:

מד"ח קוואזי – לינארית:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

$$u(x, y) \to u(t, s)$$



נשתמש בכלל השרשרת:

$$u_t = u_x x_t + u_y y_t$$

אילוץ 1: $x_t = a$, אילוץ 2: $y_t = b$. לכן –

$$u_t = u_x \cdot a + u_y \cdot b = c \Rightarrow u_t = c$$

לכן קיבלנו מערכת משוואות הנקראת מערכת הקווים האופיינים:

$$\begin{cases} x_t = a \\ y_t = b \\ u_t = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a \\ \dfrac{dy}{dt} = b \\ \dfrac{du}{dt} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{dx}{a} \\ dt = \dfrac{dy}{b} \\ dt = \dfrac{du}{c} \end{cases}$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}$$

לכן שיטת לגרנז' נובעת משיטת הקווים האופיינים.

$$u_t = 0\,, du = 0\;dt\,, \frac{du}{dt} = 0\,, u = const$$

(סימונים שונים עבור כך ש – u קבועה).

כעת, שיטת הקווים האופיינים היא שיטה למציאת פתרון מקומי לעומת שיטת לגרנז' שהיא שיטה למציאת פתרון כללי למד"ח הקוואזי לינארית מסדר I.

נשים לב –

$$au_x + bu_y = c \Rightarrow au_x + bu_y - c = 0 \Rightarrow \langle (a,b,c), \big(u_x, u_y, -1\big) \rangle = 0$$

כאשר מתקיים:

$$\big(u_x, u_y, -1\big) = \nabla u$$

תנאי החיתוך – תנאי "הטרסברסלות":

$$J|_{t=0} \neq 0$$

כלומר, ניתן לבצע החלפת משתנים מ - (x,y) ל - (t,s) ולהיפך, כאשר:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} = \begin{vmatrix} x_t & y_t \\ x_s & y_s \end{vmatrix}$$

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ח בעזרת שיטת הקווים האופיינים:

$$\begin{cases} u_x + u_y = 2 \\ u(x,0) = x^2 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

המקדמים הם:

$$a = 1, b = 1, c = 2$$

נכתוב את משוואות הקווים האופיינים:

$$\begin{cases} x_t = 1 \\ y_t = 1 \\ u_t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \displaystyle\int dx = \int dt \\ \displaystyle\int dy = \int dt \\ \displaystyle\int du = \int 2\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t,s) = t + f_1(s) \\ y(t,s) = t + f_2(s) \\ u(t,s) = 2t + f_3(s) \end{cases}$$

מערכת המשוואות האחרונה הנ"ל נקראת משטח אינטגרלי/משטח היתר.

כעת, כיצד נמצא את f_1, f_2, f_3? לצורך כך, ניעזר תנאי ההתחלה.

קו התחלתי $(t = 0)$:

$$\Gamma = \big(x(0,s), y(0,s), u(0,s)\big)$$

נדרוש מ – Γ שיהיה רציף לפי המשתנה s ולא יחתוך את עצמו.

$$u(x,0) = x^2$$

לכן:

$$\text{נסמן}:\begin{cases} y(0,s)=0 \\ x(0,s)=s \\ u(0,s)=s^2 \end{cases}$$

לכן:

$$\Gamma=\big(x(0,s),y(0,s),u(0,s)\big)=(s,0,s^2)$$

כעת:

$$s=x(0,s)=f_1(s)$$

$$0=y(0,s)=f_2(s)$$

$$s^2=u(0,s)=f_3(s)$$

לכן:

$$x(t,s)=t+s$$

$$y(t,s)=t$$

$$u(t,s)=t+s^2$$

נבדוק את תנאי החיתוך:

$$J|_{t=0}=\begin{vmatrix} a & b \\ x'(0,s) & y'(0,s) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

ולכן נוכל לחזור למשתנים הקודמים, מ - t,s נוכל לחזור למשתנים x,y:

$$\boxed{t=y}$$

$$x=y+s\Rightarrow \boxed{s=x-y}$$

ולכן:

$$\boxed{u(x,y)=2y+(x-y)^2}$$

פתרון פרטי.

■