שאלה 1.

הוכיחו כי הסדרה ... $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},$ מתכנסת ומיצאו את גבולה.

רמז: ראשית הגדירו אותה ע"י נוסחת נסיגה ואז הראו כי היא מונוטונית וחסומה מלעיל.

$$a_1 = \sqrt{2}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$$

נראה כי היא חסומה מלעיל: נראה כי $a_n < 2$ לכל n. באינדוקציה: עבור $a_1 = \sqrt{2} < 2$

נניח כי הטענה מתקיימת עבור a_k כלומר $a_k < 2$ ונראה כי היא מתקיימת עבור a_{k+1} כלומר צ"ל $a_{k+1} < 2$. אכן על סמך הנחת האינדוקציה

$$a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$$

כדרוש.

נראה כי היא עולה כלומר כי $a_{n+1} - a_n > 0$ לכל n. מספיק להראות $a_{n+1}^2 - a_n^2 > 0$ לכל n כי בבירור כל איברי הסדרה אי-שליליים.

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 = 2 + a_n - a_n^2 = (a_n+1)(2-a_n)$$

(הגענו לפירוק זה ע"י פתרון משוואה ריבועית)

כעת, האיבר הראשון במכפלה הוא חיובי כי כאמור $a_n > 0$ לכל n, והאיבר השני הוא חיובי כי הוכחנו $a_n < 2$ לכל n.

לסיכום, הראנו שהסדרה עולה וחסומה מלעיל ולכן היא מתכנסת. נמצא את גבולה. נסמן $L = \lim a_n$.

בבירור מתקיים גם $\lim a_{n+1} = L$ כי זו תת-סדרה של הסדרה המקורית (או בגלל שזו הסדרה המקורית עד כדי שינוי של מספר סופי של איברים).

לכן לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{2+a_n}$$

$$L = \sqrt{2+L}$$

לכן $L = 2$ או $\mathrm{L} = -1$. הפתרון השני נפסל כיוון שכל איברי הסדרה אי-שליליים לכן גם גבול הסדרה אי-שלילי. לסיכום $L = 2$.

שאלה 2. תהי (a_n) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1} = 2a_n - \frac{1}{a_n}$ ונתון כי $a_1 > 1$.

א. הוכיחו כי (a_n) מונוטונית עולה.

נראה כי $a_n > 1$ לכל n באינדוקציה. עבור a_1 זה נתון. נניח כי זה נכון עבור a_k ונוכיח עבור a_{k+1}.

$$a_{k+1} = 2a_k - \frac{1}{a_k} > 2a_k - a_k = a_k > 1$$

כדרוש (במעבר השני השתמשנו בהנחת האינדוקציה.)

כעת,

$$a_{n+1} - a_n = 2a_n - \frac{1}{a_n} - a_n = a_n - \frac{1}{a_n} > 1 - 1 = 0$$

ב. חשבו את גבול הסדרה (a_n).

הראנו בסעיף א' כי הסדרה מונוטונית עולה. לכן ע"ס משפט מההרצאה או שהיא מתכנסת למספר ממשי או שהיא מתכנסת לאינסוף.

נניח בשלילה שהיא מתכנסת למספר ממשי L. אז בדומה לסעיף א' נקבל ע"ס אריתמטיקה של גבולות

$$\lim(a_{n+1}) = \lim(2a_n - \frac{1}{a_n})$$

$$L = 2L - \frac{1}{L}$$

כלומר $L = \frac{1}{L}$ כלומר $\mathrm{L} = 1$ או $L = -1$, שניהם בלתי אפשריים כי $a_1 > 1$ והראנו כי הסדרה עולה ממש.

כלומר הסדרה לא מתכנסת למספר ממשי ולכן היא מתכנסת לאינסוף.

שאלה 3. יהיו $\alpha, \beta > 0$ ונגדיר $a_1 = \alpha, b_1 = \beta$ וכן $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

א. הוכיחו ש-$(a_n), (b_n)$ מתכנסות.

ב. הוכיחו כי $lim(a_n) = lim(b_n)$.

תחילה נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2}{2} \geq 0$. כלומר, לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq b_{n+1}$; או, לכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n \geq b_n$.

כעת נבחן את המונוטוניות של הסדרות. לכל $n \geq 2$ מתקיים

$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$. כלומר, החל מ-$n = 2$: $a_n \searrow$. כמו כן,

$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{b_n b_n} = b_n$. כלומר, החל מ-$n = 2$: $b_n \nearrow$. מכאן מתקיים:

$b_2 \leq b_n \leq a_n \leq a_2$.

לסיכום, לכל $n \geq 2$ הסדרות הן מונוטוניות וחסומות ולכן מתכנסות.

נוכיח ש-$\lim a_n = \lim b_n$. נסמן $\lim a_n = a, \lim b_n = b$. מתקיים:

$a = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\lim a_n}{2} + \frac{\lim b_n}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$. נעביר אגפים ונראה ש-$a = b$.

שאלה 4.

א. תהי (a_n) סדרה חסומה. הוכיחו כי קבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה היא חסומה.

רמז: השתמשו במשפט מההרצאה שאומר שאם $a_n \leq b_n$ לכל n והסדרות מתכנסות אז $lim(a_n) \leq lim(b_n)$.

יהיו A, B ממשיים כך שלכל n טבעי מתקיים $A < a_n < B$.

יהי X גבול חלקי של a_n. כלומר קיימת ת"ס a_{n_k} השואפת ל-X.

מתקיים $A < a_{n_k} < B$ לכל k טבעי.

לכן $\lim A \leq \lim(a_{n_k}) \leq \lim B$.

כלומר $A \leq X \leq B$.

הראנו כי כל גבול חלקי X של a_n מקיים $A \leq X \leq B$ כלומר אכן קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה חסומה.

ב. תנו דוגמא לסדרות מתכנסות המקיימות $a_n < b_n$ לכל n שלא מקיימות $lim(a_n) < lim(b_n)$.

$$a_n = 1 - \frac{1}{n}, b_n = 1 + \frac{1}{n}$$

ג. תנו דוגמא לסדרה לא חסומה שקבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה חסומה.

למשל $a_n = n$ שאין לא גבולות חלקיים ממשיים (והקבוצה הריקה חסומה). או למשל הסדרה הבאה

3,10,3,20,3,30,3,40, ...

שיש לה גבול חלקי ממשי אחד (3).

ד. תנו דוגמא לסדרה לא חסומה שקבוצת כל הגבולות החלקיים הממשיים שלה איננה חסומה.

למשל הסדרה הבאה

$$1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5, \ldots$$

כל מספר טבעי מופיע בסדרה זו אינסוף פעמים לכן בפרט כל מספר טבעי הוא גבול חלקי של הסדרה, וקבוצת הטבעיים איננה חסומה.

ה. תהי (a_n) סדרה. הוכיחו כי $limsup\ (-a_n) = -liminf\ (a_n)$.

צריך להראות ש-$limsup(-a_n) = -liminf(a_n)$ כלומר ש-$liminf(a_n) = -limsup(-a_n)$.

כלומר צריכים להראות ש—$-limsup(-a_n)$— הוא הגבול התחתון של a_n.

(i) הוא גבול חלקי כיוון ש-$limsup(-a_n)$ הוא גבול חלקי של $(-a_n)$ ולכן יש ת"ס של $(-a_n)$ שנסמנה $-a_{n_k}$ כך ש- $-a_{n_k} \to limsup(-a_n)$ לכן לפי אריתמטיקה של גבולות $a_{n_k} \to -limsup(-a_n)$.

(ii) הוא הגבול החלקי הקטן ביותר כי אם $x < -limsup(-a_n)$ אז $-x > limsup(-a_n)$
לכן $-x$ איננו גבול חלקי של $-a_n$, ולכן x איננו גבול חלקי של a_n (כי לו x היה גבול חלקי של a_n כלומר הייתה ת"ס $a_{n_k} \to x$ אז לפי אריתמטיקה $-a_{n_k} \to -x$ כלומר $-x$ היה גבול חלקי של $-a_n$ בסתירה).

<u>שאלה 5.</u>

מיצאו את כל הגבולות החלקיים ואת הגבול העליון והתחתון של הסדרות הבאות:

א. $a_n = (-1)^n\left(5 - \frac{4}{2^n}\right)$

עבור n-ים זוגיים מתקבל $a_n = 5 - \frac{4}{2^n}$, סדרה השואפת ל-5.

עבור n-ים אי-זוגיים מתקבל $a_n = -5 + \frac{4}{2^n}$, סדרה השואפת ל--5.

כיוון שהמספרים הזוגיים והאי-זוגיים מכסים את כל המספרים הטבעיים, אלה הם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה, ולכן הגבול העליון הוא 5 והגבול התחתון הוא -5.

ב. $a_n = sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

עבור $n_k = 4k$ מתקבל

$$a_{n_k} = \sin\left(\frac{4k\pi}{4}\right) = \sin(k\pi) = 0$$

כלומר זו סדרה קבועה השואפת ל-0.

עבור $n_k = 8k+1$ מקבלים

$$a_{n_k} = \sin\left(\frac{(8k+1)\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{8\pi k}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

כלומר זו סדרה קבועה השואפת ל-$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

באותו האופן מגדירים ת"ס ע"י האינדקסים $n_k = 8k+2, 8k+3, 8k+5, 8k+6, 8k+7$

ומקבלים בהתאמה שהן קבועות ושואפות לגבולות $1,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

לכן כיוון שהאינדקסים של ת"ס אלה מכסים את כל הטבעיים, מקבל כי כל הגבולות החלקיים הם $0,1,-1,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$, ובפרט הגבול העליון הוא 1 והגבול התחתון הוא מינוס 1.

ג. $a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$

עבור n-ים זוגיים מקבלים $a_n=1+\frac{1}{n}\to 1$

עבור n-ים אי-זוגיים מקבלים $a_n=-1+\frac{1}{n}\to -1$

הזוגיים והאי-זוגיים מכסים את כל הטבעיים לכן אלה הם הגבולות החלקיים היחידים ולכן הגבול העליון הוא 1 והגבול התחתון הוא -1.

ד. $a_n=\frac{2n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{16n+14}$

עבור $n_k=2k$ מקבלים

$$a_{n_k}=\frac{2n_k\sin\left(\frac{n_k\pi}{2}\right)}{16n_k+14}=\frac{4k\sin(\pi k)}{32k+14}=0$$

הסדרה הקבועה 0 המתכנסת ל-0.

עבור $n_k=4k+1$ מקבלים

$$a_{n_k}=\frac{2n_k\sin\left(\frac{n_k\pi}{2}\right)}{16n_k+14}=\frac{(8k+2)\sin\left(\frac{4k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{64k+16+14}=\frac{(8k+2)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{64k+30}=\frac{(8k+2)}{64k+30}\to\frac{1}{8}$$

עבור $n_k=4k+3$ מקבלים

$$a_{n_k}=\frac{2n_k\sin\left(\frac{n_k\pi}{2}\right)}{16n_k+14}=\frac{(8k+6)\sin\left(\frac{4k\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)}{64k+48+14}=\frac{(8k+6)\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{64k+62}=\frac{-(8k+2)}{64k+30}\to\frac{-1}{8}$$

האינדקסים $n_k=2k$, $n_k=4k+1$, $n_k=4k+3$ מכסים את כל המספרים הטבעיים ועל כן הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה הם $0,\frac{1}{8},-\frac{1}{8}$. לכן הגבול העליון הוא $\frac{1}{8}$ והגבול התחתון הוא $-\frac{1}{8}$.

<u>שאלה 6.</u>

א. תהי (a_n) סדרה כך שקיים לה אוסף סופי של תת-סדרות, אשר כולן מתכנסות לאותו הגבול הממשי L.

כמו כן נתון כי אוסף כל האינדקסים של כל תת-הסדרות מכסה את כל המספרים הטבעיים (בקצרה: "תת-הסדרות מכסות את הסדרה").

(מספיק להניח שהוא מכסה את כל המספרים הטבעיים החל ממיקום מסוים).

הוכיחו כי $(a_n)\to L$.

נניח כי נתונות M תתי-סדרות של (a_n),

$$\{(a_{n_k^1}),(a_{n_k^2})\dots,(a_{n_k^M})\}$$

כולן שואפות ל-L, וכך שלכל $b\in\mathbb{N}$ יש i,j כך ש-$n_j^i=b$.

רוצים להראות ש-$a_n\to L$.

יהי $\epsilon>0$.

כיוון ש-$a_{n_k^1}\to L$, קיים N_1 כך שלכל $k>N_1$ מתקיים $\left|a_{n_k^1}-L\right|<\epsilon$.

כיוון ש-$a_{n_k^2}\to L$, קיים N_2 כך שלכל $k>N_2$ מתקיים $\left|a_{n_k^2}-L\right|<\epsilon$.

…

כיוון ש-$a_{n_k^M}\to L$, קיים N_M כך שלכל $k>N_M$ מתקיים $\left|a_{n_k^M}-L\right|<\epsilon$.

נבחר $\mathrm{N}=\max\left(n_{(N_1)}^1,\dots,n_{(N_M)}^M\right)$. יהי $k>N$.

יש i,j כך ש-$n_j^i=k$. כיוון ש-$k>N$ בפרט $k>n_{(N_i)}^i$ כלומר $n_j^i>n_{(N_i)}^i$ לכן וודאי $j>N_i$ כי (n_k^i) סדרה עולה (לפי הגדרת תת-סדרה), ולכן $\left|a_{n_j^i}-L\right|<\epsilon$

ולכן

$$|a_k-L|=\left|a_{n_j^i}-L\right|<\epsilon\,.$$

לסיכום הראנו כי לכל $\epsilon>0$ קיים N כך שלכל $k>N$ מתקיים $|a_k-L|<\epsilon$ כדרוש.

ב. הטענה איננה נכונה אם נמחק את המילה "סופי" מהניסוח של סעיף א'.

באיזה שלב בהוכחתכם השתמשתם בסופיות האוסף?

עבור ההוכחה מסעיף א' לעיל, בשלב בו בחרנו את N הסתמכנו על כך שלקבוצה סופית יש מקסימום. לו הקבוצה היתה אינסופית לאו דווקא היה ניתן לטעון שיש לה מקסימום.

כמובן עבור הוכחות אחרות השימוש בסופיות האוסף יכול להיות בצורה אחרת.

ג. הראו כי לסדרה הלא מתכנסת $(a_n)=(-1)^n$ קיים אוסף (אינסופי) של תת-סדרות המכסות את (a_n) השואפות כולן לאותו גבול ממשי.

נגדיר תתי-סדרות של a_n בעלות האינדקסים הבאים:

$$1,2,4,6,8,10,\dots$$

$$1,2,3,4,6,8,10,\dots$$

$$1,2,3,4,5,6,8,10,\dots$$

וכך הלאה (כלומר האינדקסים של תת-הסדרה ה-k-ית שנגדיר יכילו את כל המספרים הטבעיים עד $2k$ ומשם יכילו רק את האינדקסים הזוגיים).

כל מספר טבעי מופיע לפחות באחת הסדרות לעיל, וכל הסדרות שואפות ל-1.