דיוורציות:

תהי נקודה p במרחב אוקלידי n מימדי $\mathbb{R}^n$. נגדיר את $\mathbb{D}_p$ להיות קבוצת כל הפונקציות $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ שמוגדרות בסביבת p וחלקות ב- p.

$\mathbb{D}_p$ הוא מרחב וקטורי - אפשר לסכום פונקציות ולכפול בקבוע, והוא ∞ מימדי כי הוא מכיל, למשל, את כל הפולינומים.

דירווציה היא אופרטור ליניארי $X : \mathbb{D}_p \to \mathbb{R}$ שמקיים את כלל לייבניץ' ב- p:

$$X(fg) = X(f)g(p) + f(p)X(g)$$

לכל זוג פוקציות $f, g \in \mathbb{D}_p$.

נבהיר שהעובדה ש- X אופרטור ליניארי פירושה ש-

$$X(af + bg) = X(af) + X(bg)$$

לכל זוג פוקציות $f, g \in \mathbb{D}_p$ וסקאלרים $a, b \in \mathbb{R}$.

כדוגמא לדיוורצית ניתן לתת את אופרטורי הנגזרות הכיווניות.

מאינפי' שלכל שתי פונקציות f, g חלקות ב- p ולכל וקטור $v \in \mathbb{R}^n$ הנגזרת הכיוונית של הפונקציה $af + bg$ ב- p מקיימת $\frac{\partial(af+bg)}{\partial v}|_p = a\frac{\partial f}{\partial v}|_p + b\frac{\partial g}{\partial v}|_p$ והנגזרת הכיוונית של הפונקציה fg ב- p מקיימת $\frac{\partial(fg)}{\partial v}|_p = \frac{\partial f}{\partial v}|_p g(p) + f(p)\frac{\partial g}{\partial v}|_p$.

זה אומר שאופרטור הנגזרת $\frac{\partial}{\partial v}$, ששולח את f ל- $\frac{\partial f}{\partial v}|_p$ הוא ליניארי ומקיים את כלל לייבניץ' – מה שאומר שהוא דירווציה.

למעשה, אילו הם כל הדיוורצית – כל דיוורציה היא נגזרת כיוונית $\frac{\partial}{\partial v}$ בכיוון וקטור מסויים v. נוכיח זאת בשני צעדים:

א) עבור הפונקציה הקבועה 1 כלל לייבניץ נותן שלכל דיוורציה X

$$X(1) = X(1 \cdot 1) = X(1)1 + 1X(1) = 2X(1)$$

ולכן $X(1) = 0$. לפי ליניאריות לכל פונקציה קבועה a $X(a) = aX(1) = 0$.

ב) לפי פונקציה $f(x_1, \dots, x_n)$ חלקה ב- $p = (p_1, \dots, p_n)$ מקיימת

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(p) + \sum_{i=1}^{n} \left(f_i'(p) + g_i(x)\right)(x_i - p_i)$$

עבור איזשהן פונקציות חלקות g_i המקיימות $g_i(p) = 0$.

לפי ליניאריות

$$X(f) = X\big(f(p)\big) + \sum_{i=1}^{n} X\left(\big(f_i'(p) + g_i(x)\big)(x_i - p_i)\right)$$

לפי א) $X\big(f(p)\big) = 0$ (כי $f(p)$ קבוע) ולכן ניתן להיפתר ממנו, אז נשתמש בכלל לייבניץ ונקבל

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X\left(\big(f_i'(p) + g_i(x)\big)\right)(p_i - p_i) + \big(f_i'(p) + g_i(p)\big) X(x_i - p_i) \right)$$

מכיוון ש- $p_i - p_i = 0$ וגם $g_i(p) = 0$ הביטוי הזה שווה ל-

$$\sum_{i=1}^{n} \big(f_i'(p) X(x_i - p_i)\big) = \sum_{i=1}^{n} \Big(f_i'(p)\big(X(x_i) + X(p_i)\big)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \big(f_i'(p) X(x_i)\big)$$

וזו הנגזרת הכיוונית $\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_p$ עבור הווקטור $v = \big(X(x_1), X(x_2), \dots, X(x_n)\big)$.