תרגול 12 בדידה להנדסה

23 בינואר 2015

בקבוצות סופיות מתקיימות שתי תכונות של עוצמות:

1. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
2. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

יש להיזהר כאשר מדובר על קבוצות אינסופיות.

אמנם אפשר להכליל תכונות אלה לקבוצות אינסופיות, אך זה דורש הגדרה של כמה הגדרות וכללים של חשבון עוצמות (אריתמטיקה של עוצמות), שלא נעסוק בהם בקורס זה.

תזכורת:

$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$

כעת נסביר למה.

נתחיל עם $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

אנחנו בעצם רוצים להוכיח שאכן $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, קרי למצוא פונקציות חח"ע ועל מתאימות.

נגדיר פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ע"י:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & n = 2k \\ -\frac{n-1}{2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

מה בעצם הפונקציה עושה? את המספרים האי זוגיים הולכים למספרים השליליים ולאפס, והמספרים הזוגיים הולכים לחיוביים.

בעצם חילקנו את $\mathbb{N}$ לשתי קבוצות ובעזרתן "נכסה" את $\mathbb{Z}$.

נראה, אם כן, שהפונקציה שלנו היא חח"ע ועל.

נתחיל עם חח"ע. נניח שמתקיים $f(n_1) = f(n_2)$.

לפי הגדרת הפונקציה, לא יכול להיות שאחד מהמקורות זוגי והאחר אי זוגי, כי אז התמונה של הזוגי הייתה חיובית והתמונה של האי זוגי הייתה שלילית וזו סתירה לכך שהן שוות.

אם כן, שני המקורות זוגיים או ששניהם אי זוגיים.

אם הם זוגיים, אז $f(n_1) = f(n_2)$ פירושו $\frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2}$, ואז ברור שאכן $n_1 = n_2$.

אם הם אי זוגיים, אז $f(n_1) = f(n_2)$ פירושו $-\frac{n_1-1}{2} = -\frac{n_2-1}{2}$ ושוב נקבל $n_1 = n_2$.

סה"כ, $n_1 = n_2$ ולכן הפונקציה חח"ע.
כעת, יהי $z \in \mathbb{Z}$.
אם z חיובי, נקבל:

$$f(2z) = \frac{2z}{2} = z$$

כלומר $2z \in \mathbb{N}$ הוא המקור של z.
אם z שלילי או אפס, נקבל:

$$f(-2z+1) = -\frac{-2z+1-1}{2} = z$$

כלומר $-2z+1$ הוא המקור של z.
סה"כ, קיבלנו שלכל $z \in \mathbb{Z}$ יש מקור ב־$\mathbb{N}$ ולכן הפונקציה היא על.
הפונקציה חח"ע ועל, ולכן $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
נותרנו עם $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$.
איברים ב־$\mathbb{Q}$ הם מהצורה $\frac{m}{n}$ כאשר $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.
נגדיר פונקציה $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ ע"י:

$$g(m,n) = \frac{m}{n}$$

קל לראות שזו פונקציה על (ממש מההגדרה).
לכן, $|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$.
כעת, ראינו ש־$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, ולכן $|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$. חשבו על הפונקציה:

$$h(m,n) = \begin{cases} (\frac{m}{2}, n) & m = 2k \\ (-\frac{m-1}{2}, n) & m = 2k+1 \end{cases}$$

כעת, אנו יודעים שמתקיים: $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ ולכן גם $|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, ולכן:

$$|\mathbb{N}| \geq |\mathbb{Q}|$$

מצד שני, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ ולכן $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$.
סה"כ, לפי קנטור ברנשטיין נקבל שאכן:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$$

מתקיים:

איחוד של שתי קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה.

אם כן, קל להראות באינדוקציה שכל איחוד סופי של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה.

בנוסף, איחוד בן מניה של קבוצות בנות מניה הוא קבוצה בת מניה.

מה?

תהיינה $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ קבוצות בנות מניה, אזי גם הקבוצה:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

היא בת מניה.

אפשר להראות זאת בכמה דרכים.

אנו ראינו שהקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ היא בת מניה.

מכיוון שכל A_n בת מניה, נוכל לכל A_n להגדיר פונקציה על $f_n : \mathbb{N}\to A_n$.

כעת, נגדיר פונקציה $g : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ע"י:

$$g(n_1,n_2) = f_{n_1}(n_2)$$

g על, מכיוון שכל אחת מה־f_n על.

לכן, נקבל $|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n| \le |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ ולכן הקבוצה בת מניה.