**הערה**

תהי $A\in F^{n×n}$. נניח: $p\_{A}(x)$ מתפרק לחלוטין.

$A$ *לכסינה אם ורק אם* $m\_{A}\left(x\right)=\left(x-λ\_{1}\right)\cdots (x-λ\_{s})$*.*

***נימוק***

$$A\~J=\left(\begin{matrix}J\_{n\_{1}}(λ\_{1})&0&\cdots &\cdots &0\\0&\ddots &\ddots &\ddots &\vdots \\\vdots &\ddots &\ddots &\ddots &\vdots \\\vdots &\ddots &\ddots &\ddots &0\\0&\cdots & \cdots &0&J\_{n\_{t}}\left(λ\_{t}\right)\end{matrix}\right)$$

$$$$

*נניח* $A$ *לכסינה, אזי כל בלוק של* $J$ *הוא מגודל* $1×1$ *(שכן מיחידות צורת ז'ורדן היא מטריצה אלכסונית).*

*לכן:*

$$m\_{A}\left(x\right)=m\_{J}\left(x\right)=l.c.m\left\{\left(x-λ\_{1}\right)\cdots \left(x-λ\_{1}\right),\cdots ,\left(x-λ\_{s}\right)\cdots \left(x-λ\_{s}\right)\right\}=\left(x-λ\_{1}\right)\cdots (x-λ\_{s})$$

$$$$

*אם* $m\_{A}\left(x\right)=\left(x-λ\_{1}\right)\cdots (x-λ\_{s})$*, אזי כל בלוק ב –* $J$ *הוא מגודל* $1×1$*. אחרת, אם קיים בלוק מגודל* $l×l$*, אזי יש לו פולינום מינימלי בצורה* $\left(x-λ \right)^{l}$*, בסתירה להנחה. ז"א,* $J$ *אלכסונית, ולכן* $A$ *לכסינה (שכן מיחידות צורת ז'ורדן היא אלכסונית).*

$∎$

**מכפלה פנימית**

יהי $F=\left\{\begin{array}{c}R\\C\end{array}\right.$.

***הגדרה***

יהי $V\_{/F}$ מרחב וקטורי.

נגדיר, לכל זוג וקטורים $v,w\in V$, את **המכפלה הפנימית** של $v$ על $w$, $\left⟨v,\left.w\right⟩\right.\in F$, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. $1.5$ **לינאריות (**$sesquilinear$**)**

 $<α\_{1}v\_{1}+α\_{2}v\_{2}, w> =α\_{1}<v\_{1},w>+ α\_{2}<v\_{2},w>$.

 $<v,β\_{1}w\_{1}+β\_{2}w\_{2}> =\overbar{β\_{1}}<v,w\_{1}>+ \overbar{β\_{2}}<v,w\_{2}>$.

1. **הרמטיות (**$Hermite$**)**

$<v,w> = \overline{<w,v>}$.

1. **אי שליליות (או חיוביות)**

$<v,v> \in R\_{\geq 0}$, $<v,v> =0$ $⇔$ $v=\vec{0}$.

***תזכורת***

יהי: $z=x+y⋅i\in C$. אזי:

* $\overbar{z}=x-y⋅i$.
* $\overbar{z\_{1}+z\_{2}}=\overbar{z\_{1}}+\overbar{z\_{2}}$.
* $\overbar{z\_{1}⋅z\_{2}}=\overbar{z\_{1}}⋅\overbar{z\_{2}} $.
* $\overbar{\overbar{z}}=z$.
* $\left|z\right|=z⋅\overbar{z}=x^{2}+y^{2}\in R\_{\geq 0}$.
* $\left|z\right|=0⟷z=0$.

***דוגמה***

$V=C^{n}=\left\{v=\left(\begin{matrix}γ\_{1}\\\vdots \\\vdots \\γ\_{n}\end{matrix}\right)\right\}\_{γ\_{i}\in C}$.

אם $w=\left(\begin{matrix}γ\_{1}'\\\vdots \\\vdots \\γ\_{n}'\end{matrix}\right)$, נגדיר: $<v,w> =γ\_{1}\overbar{γ\_{1}^{'}}+\cdots +γ\_{n}\overbar{γ\_{n}^{'}}$.

נבדוק את התנאים 1,2,3:

1. נסמן:

$$v\_{1}=\left(\begin{matrix}γ\_{1}\\\vdots \\γ\_{n}\end{matrix}\right),v\_{2}=\left(\begin{matrix}δ\_{1}\\\vdots \\δ\_{n}\end{matrix}\right)$$

נחשב:

$$<α\_{1}v\_{1}+α\_{2}v\_{2},w> = <\left(\begin{matrix}α\_{1}γ\_{1}+α\_{2}δ\_{1}\\\vdots \\α\_{1}γ\_{n}+α\_{2}δ\_{n}\end{matrix}\right),\left(\begin{matrix}γ\_{1}'\\\vdots \\γ\_{n}'\end{matrix}\right)>$$

$$<α\_{1}v\_{1}+α\_{2}v\_{2},w> =\left(α\_{1}γ\_{1}+α\_{2}δ\_{1}\right)\overbar{γ\_{1}^{'}}+\cdots +\left(α\_{1}γ\_{n}+α\_{2}δ\_{n}\right)\overbar{γ\_{n}^{'}}$$

$$<α\_{1}v\_{1}+α\_{2}v\_{2},w> =α\_{1}\left(γ\_{1}\overbar{γ\_{1}^{'}}+\cdots γ\_{n}\overbar{γ\_{n}^{'}}\right)+α\_{2}(δ\_{1}\overbar{γ\_{1}^{'}}+⋅⋅⋅δ\_{n}\overbar{γ\_{n}^{'}})$$

$$<α\_{1}v\_{1}+α\_{2}v\_{2},w> =α\_{1}<v\_{1},w> +α\_{2}<v\_{2},w>$$

 נסמן:

$$w\_{1}=\left(\begin{matrix}γ\_{1}'\\\vdots \\γ\_{n}'\end{matrix}\right),w\_{2}=\left(\begin{matrix}δ\_{1}'\\\vdots \\δ\_{n}'\end{matrix}\right)$$

 נחשב:

$$<v,β\_{1}w\_{1}+β\_{2}w\_{2}> = <\left(\begin{matrix}γ\_{1}\\\vdots \\γ\_{n}\end{matrix}\right),\left(\begin{matrix}β\_{1}γ\_{1}^{'}+β\_{2}δ\_{1}'\\\vdots \\β\_{1}γ\_{n}^{'}+β\_{2}δ\_{n}'\end{matrix}\right)>$$

$$=γ\_{1}\overbar{(β\_{1}γ\_{1}^{'}+\cdots +β\_{2}δ\_{1}^{'})}+γ\_{n}\overbar{\left(β\_{1}γ\_{n}^{'}+\cdots +β\_{2}δ\_{n}^{'}\right)}$$

$$=\overbar{β\_{1}}\left(γ\_{1}\overbar{γ\_{1}^{'}}+\cdots +γ\_{n}\overbar{γ\_{n}^{'}}\right)+β\_{2}\left(γ\_{1}\overbar{δ\_{1}^{'} }+\cdots +γ\_{n}\overbar{δ\_{n}^{'}}\right)$$

$$<v,β\_{1}w\_{1}+β\_{2}w\_{2}> =\overbar{β\_{1}}<v,w\_{1}> +\overbar{β\_{2}}<v,w\_{2}>$$

1. נסמן:

$$v=\left(\begin{matrix}γ\_{1}\\\vdots \\γ\_{n}\end{matrix}\right),w=\left(\begin{matrix}γ\_{1}'\\\vdots \\γ\_{n}'\end{matrix}\right)$$

נחשב:

$$<v,w> = <\left(\begin{matrix}γ\_{1}\\\vdots \\γ\_{n}\end{matrix}\right),\left(\begin{matrix}γ\_{1}'\\\vdots \\γ\_{n}'\end{matrix}\right)> = γ\_{1}\overbar{γ\_{1}^{'}}+\cdots γ\_{n}\overbar{γ\_{n}^{'}}$$

$$<w,v> = <\left(\begin{matrix}γ\_{1}'\\\vdots \\γ\_{n}'\end{matrix}\right),\left(\begin{matrix}γ\_{1}\\\vdots \\γ\_{n}\end{matrix}\right)> =γ\_{1}^{'}\overbar{γ\_{1}}+\cdots +γ\_{n}^{'}\overbar{γ\_{n}}$$

$$\overbar{<w,v>} =\overbar{γ\_{1}^{'}}\overbar{\overbar{γ\_{1}}}+\cdots +\overbar{γ\_{n}^{'}}\overbar{\overbar{γ\_{n}}}=γ\_{1}\overbar{γ\_{1}^{'}}+\cdots γ\_{n}\overbar{γ\_{n}^{'}}= <v,w> $$

1. נסמן:

$$v=\left(\begin{matrix}γ\_{1}\\\vdots \\γ\_{n}\end{matrix}\right)$$

 נחשב:

$$<v,v> =γ\_{1}\overbar{γ\_{1}}+\cdots +γ\_{n}\overbar{γ\_{n}}$$

$$=\left|γ\_{1}\right|^{2}+\cdots +\left|γ\_{n}\right|^{2}\in R\_{\geq 0}$$

$$⇓$$

$$<v,v> =0$$

$$⇕$$

$$\left|γ\_{1}\right|=\cdots =\left|γ\_{n}\right|=0⇔γ\_{1}=\cdots =γ\_{n}=0⇔v=\vec{0}$$

$$∎$$

**הגדרה**

יהי $V\_{/F}$ מרחב מכפלה פנימית (מרחב וקטורי עליו מוגדרת מכפלה פנימית המקיימת את האקסיומות).

נגדיר, לכל $v\in V$, את המספר הממשי $\left|\left|v\right|\right|=\sqrt{<v,v>} $. $\left|\left|v\right|\right|$ נקרא ה**נורמה** של $v$.

$v=\vec{0}⇔\left|\left|v\right|\right|=0$. (הכללה של האורך של וקטור בגאומטריה).

**דוגמה**

$$V=R^{2}$$

$$v=\left(\begin{matrix}γ\_{1}\\γ\_{2}\end{matrix}\right), w=\left(\begin{matrix}γ\_{1}'\\γ\_{2}'\end{matrix}\right)$$

$$<v,w> =γ\_{1}⋅γ\_{1}^{'}+γ\_{2}⋅γ\_{2}'$$

$$<v,v> =γ\_{1}^{2}+γ\_{2}^{2}$$

$$\left|\left|v\right|\right|=\sqrt{γ\_{1}^{2}+γ\_{2}^{2}}$$