פתרון תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול.

שאלות להגשה

שאלה 1. נגדיר את המֶרְכָּז של חבורה G להיות

$$Z(G)=\{g\in G:\forall h\in G,gh=hg\}$$

דהיינו זהו האוסף של כל האיברים ב-G שמתחלפים עם כל איברי G.

א. הוכיחו כי לכל חבורה G מתקיים $Z(G)\leq G$ (כלומר שהמרכז של חבורה הינו תת חבורה).

ב. מצאו את $Z(S_3)$ ואת $Z(GL_2(\mathbb{R}))$, ואת האינדקסים שלהם בתוך S_3 ובתוך $GL_2(\mathbb{R})$ בהתאמה.

פתרון.

(א) על פי הקריטריון להוכחת תת חבורה:

i. $e\in Z(G)$ כי איבר היחידה מתחלף על פי ההגדרה עם כל איברי החבורה ולכן תמיד במרכז.

ii. נוכיח סגירות לכפל: יהיו $x,y\in Z(G)$, נוכיח שגם $xy\in Z(G)$ כלומר נוכיח שלכל $g\in G$ מתקיים $g\left(xy\right)=\left(xy\right)g$. הוכחה: $gxy=xgy=xyg$. (שני השוויונות נובעים מהנתון ש x ו y במרכז).

iii. נוכיח סגירות להופכי: יהא $x\in Z(G)$. נוכיח שגם $x^{-1}\in Z(G)$. הוכחה: כיוון ש x במרכז, מתקיים לכל $g\in G$ ש $xg=gx$. נכפול משמאל ומימין ב x^{-1} את שני אגפי השוויון: $x^{-1}xgx^{-1}=x^{-1}gxx^{-1}$ נצמצם ונקבל: $gx^{-1}=x^{-1}g$.

(ב) $Z(S_3)=id$ ולמעשה לכל S_n כאשר $n\geq 3$ המרכז טריוויאלי (כלומר כולל רק את איבר היחידה), והאינדקס שלו הוא 6. לגבי $Z(GL_2(\mathbb{R}))$, מכפל מטריצות ומבדיקה ישירה, מקבלים שזה שווה לאוסף כל המטריצות הסקלריות (אלכסוניות עם אותו איבר בכל האיברים על האלכסון), והאינדקס הוא ∞.

שאלה 2. תהי $Q_8=\{1,-1,i,j,k,-i,-j,-k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י: $ijk=k^2=j^2=i^2=-1$. חבורה זו נקראת חבורת הקווטרניונים. נא לשים לב שבמרומז משמות האיברים מתקיים ש- $(-1)\cdot i=-i$, $(-i)\cdot(-j)=i\cdot j$ וכדומה.

א. השלימו את "לוח הכפל" של Q_8. כלומר, לכל שני איברים $a,b\in Q_8$ רשמו למה שווה ab.

ב. מצאו את $Z(Q_8)$.

ג. מה האינדקס של $Z(Q_8)$ בתוך Q_8?

פתרון.

(א)

$\cdot$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\mathbf{1}$	1	i	j	k
$\boldsymbol{i}$	i	-1	k	$-j$
$\boldsymbol{j}$	j	$-k$	-1	i
$\boldsymbol{k}$	k	j	$-i$	-1

וקל להסיק את הכפל עבור האיברים הנגדיים.

(ב) צריך לחפש בלוח הכפל את כל האיברים שהשורות שלהם זהות לעמודות שלהם. קל לראות שאף אחד מהאיברים i, j, k אינו מתאים, ולכן גם הנגדיים שלהם לא מתאימים, ומקבלים ש $Z(Q_8) = \{1, -1\}$.

(ג) האינדקס שווה $\frac{8}{2}$ לפי משפט לגראנז', כלומר 4.

שאלה 3. יהי $f : G \to H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז f תת־חבורה אבלית.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G \cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם $\varphi : S_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$.

פתרון. א. אנחנו יודעים כי $f \leq H$. נותר להראות שהיא אבלית. יהיו $h_1, h_2 \in f$. אז ישנם איברים g_1, g_2 כך שמתקיים $f(g_1) = h_1, f(g_2) = h_2$. מפני שנתון ש-$G$ אבלית יתקיים גם

$$h_1h_2 = f(g_1)f(g_2) = f(g_1g_2) = f(g_2g_1) = f(g_2)f(g_1) = h_2h_1$$

ולכן כל זוג איברים ב-f מתחלף.

ב. אם חבורות הן איזומורפיות, אז יש בינהן איזומורפיזם. נניח $\phi : G \to H$ הוא איזומורפיזם. לכן ϕ הוא על, כלומר $\phi = H$. אם G היא אבלית, אז גם H היא אבלית לפי הסעיף הקודם. באופן דומה יש איזומורפיזם $\phi^{-1} : H \to G$ ולכן אם H אבלית, אז גם G אבלית.

ג. שתי החבורות הן מסדר 36. לכן אם קיימת פונקציה על בינהן, אז היא גם חח"ע. כלומר אילו קיים φ אפימורפיזם כזה, אז זה איזומורפיזם. אבל S_4 לא אבלית ואילו $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ היא אבלית ולפי הסעיף הקודם נגיע לסתירה.

שאלה 4. תהיינה G, H חבורות ויהי $f : G \to H$ הומומורפיזם. הוכיחו: f חח"ע אם ורק אם $\ker f = \{e_G\}$.

פתרון. לכיוון הראשון, נניח שההומומורפיזם f חח"ע. f הומומורפיזם ולכן $f(e_G) = e_H$. f חח"ע ולכן e_G היחיד שהולך לאיבר e_H, ולכן $\ker f = \{e_G\}$.

לכיוון השני, נניח שמתקיים: $\ker f = \{e_G\}$. נניח שעבור g_1, g_2 מתקיים $f(g_1) = f(g_2)$, ונרצה להראות שגם $g_1 = g_2$. אם כן, $e_H = f(g_1) f(g_2)^{-1}$ ומכיוון שזהו הומומורפיזם מתקיים: $f(g_1g_2^{-1}) = e_H$. לכן $g_1g_2^{-1} \in \ker f$ ומהנתון נקבל: $g_1g_2^{-1} = e_G$, ולכן $g_1 = g_2$. לכן f אכן חח"ע.

שאלה 5. תהי G חבורה. נגדיר $f : G \to G$ ע"י: $f(g) = g^2$.

1. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

2. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

פתרון. ב. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה אבלית. יהיו $g,h\in G$. כעת: $f(gh)=(gh)^2=ghgh=g^2h^2=f(g)f(h)$ ולכן f הומומורפיזם.לכיוון השני, נניח ש: f הומומורפיזם. יהיו $g,h\in G$. כעת: $f(gh)=(gh)^2=ghgh$ וגם $f(gh)=f(g)f(h)=g^2h^2$, כלומר $g^2h^2=ghgh$. נצמצם ונקבל: $gh=hg$, כלומר G אבלית.

ב. לכיוון הראשון, נניח שהחבורה מסדר אי-זוגי. מכיוון שהפונקציה היא הומומורפיזם (לפי הסעיף הראשון) והחבורה סופית, מספיק להראות שהפונקציה חח"ע. לשם כך יש להסביר מדוע הגרעין הוא טריוויאלי. נניח בשלילה שקיים $g\in\ker f$ המקיים $g\neq e_G$. מהגדרת הפונקציה, $e_G=f(g)=g^2$, ולכן הסדר של g הוא 2. הסדר של g מחלק את הסדר של החבורה ולכן הסדר של החבורה הוא זוגי וסתירה.
לכיוון השני, נניח שהפונקציה היא איזומורפיזם. נניח בשלילה שהסדר של החבורה הוא זוגי, לכן יש איבר מסדר 2 (ראינו בתרגול) ולכן f לא חח"ע (האיבר הזה ואיבר היחידה שניהם בגרעין) וסתירה.

שאלת רשות

השאלה איננה שאלת בונוס. אין צורך לענות עליה ולא יינתן עליה ניקוד.

שאלה 6. צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תן דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב-n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.
רמזים וספוילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.