נוסחאות למשטחים:

פרמטריזציה $\chi(u,v)$ היא פונקציה $\chi: U \to \mathbb{R}^3$ עבור תחום פתוח $U \subseteq \mathbb{R}^2$

רושמים $\chi''_{22} = \chi'_{vv}$, $\chi'_2 = \chi'_v$, $\chi'_1 = \chi'_u$ וכדומה. χ'_1 , χ'_2 בת"ל לפי הגדרת משטח רגולרי.
$\{\chi'_1(u,v)\ ,\chi'_2(u,v)\}$ הוא הבסיס של מרחב (מישור) הוקטורים שמאונכים למשטח ב- $\chi(u,v)$

<u>תבנית יסודית ראשונה:</u>

$g_{ij} = \langle \chi'_i, \chi'_j \rangle$ לכל $i,j \in \{1,2\}$ ו- $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$. זה גודל פנימי.

זכרו שכל g_{ij} היא פונקציה של (u,v), כמו כל הגדלים שיופיעו בהמשך.

לכל נקודה $p \in U$ נביט במרחב (מישור) של הווקטורים עם מקור ב- p, נגדיר $\frac{\partial}{\partial u} = (1,0)$ ו-
$\frac{\partial}{\partial v} = (0,1)$ ואז כל וקטור במרחב הזה יהיה מהצורה $e = \begin{pmatrix} e^1 \\ e^2 \end{pmatrix} = e^1 \frac{\partial}{\partial u} + e^2 \frac{\partial}{\partial v}$.

הנגזר הכיוונית תקיים

$$\frac{\partial \chi}{\partial e} = e^1 \frac{\partial \chi}{\partial u} + e^2 \frac{\partial \chi}{\partial v} = e^1 \chi'_1 + e^2 \chi'_2$$

ולכן, עבור עוד ווקטור f במישור הזה

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial \chi}{\partial e}, \frac{\partial \chi}{\partial f} \rangle &= \langle e^1 \chi'_1 + e^2 \chi'_2, f^1 \chi'_1 + f^2 \chi'_2 \rangle \\
&= e^1 f^1 \langle \chi'_1, \chi'_1 \rangle + (e^1 f^2 + e^2 f^1) \langle \chi'_1, \chi'_2 \rangle + e^2 f^2 \langle \chi'_2, \chi'_2 \rangle \\
&= e^1 f^1 g_{11} + (e^1 f^2 + e^2 f^1) g_{12} + e^2 f^2 g_{22} = (e^1 \quad e^2) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1 \\ f^2 \end{pmatrix} \\
&= e^T G f
\end{aligned}$$

G היא מכפלה פנימית על המישור הזה, (היא סימטרית ולכל וקטור $e \neq \bar{0}$ $e^T G e = \langle \frac{\partial \chi}{\partial e}, \frac{\partial \chi}{\partial e} \rangle > 0$)
כל וקטור e במישור מקבל, לפי G, את אורך הרגיל של $\frac{\partial \chi}{\partial e}$.

<u>אורכים וזוויות של מסילות:</u>

נסמן . βכל מסילה $\beta = \chi \circ \alpha$ על המשטח היא מהצורה עבור איזשהי מסילה α ב- $\mathbb{R}^2$
$\alpha(t) = (\alpha^1(t), \alpha^2(t))$ולפי כלל השרשרת

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{d\alpha^1}{dt} + \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{d\alpha^2}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial \frac{d\alpha}{dt}}$$

ולכן

$$\langle \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\beta}{dt} \rangle = \langle \frac{\partial \chi}{\partial \frac{d\alpha}{dt}}, \frac{\partial \chi}{\partial \frac{d\alpha}{dt}} \rangle = \frac{d\alpha}{dt}^T G \frac{d\alpha}{dt}$$

בפרט האורך של המסילה ב- $t_1 \le t \le t_2$ הוא:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\|\frac{d\beta}{dt}\right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\langle\frac{d\beta}{dt},\frac{d\beta}{dt}\rangle}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{d\alpha}{dt}^T\ G\,\frac{d\alpha}{dt}}\, dt$$

והזווית בין שתי מסילות $\beta_1 = \chi \circ \alpha_1$ ו- $\beta_2 = \chi \circ \alpha_2$ תהיה

$$\arccos\frac{\langle\frac{d\beta_1}{dt},\frac{d\beta_2}{dt}\rangle}{\left\|\frac{d\beta_1}{dt}\right\|\left\|\frac{d\beta_2}{dt}\right\|} = \arccos\frac{\langle\frac{d\beta_1}{dt},\frac{d\beta_2}{dt}\rangle}{\sqrt{\langle\frac{d\beta_1}{dt},\frac{d\beta_1}{dt}\rangle}\sqrt{\langle\frac{d\beta_2}{dt},\frac{d\beta_2}{dt}\rangle}}$$
$$= \arccos\frac{\frac{d\alpha_1}{dt}^T\ G\,\frac{d\alpha_2}{dt}}{\sqrt{\frac{d\alpha_1}{dt}^T\ G\,\frac{d\alpha_1}{dt}}\sqrt{\frac{d\alpha_2}{dt}^T\ G\,\frac{d\alpha_2}{dt}}}$$

שני אלה הן תכונות פנימיות.

<u>שטח:</u>

תהי צורה ב- $T \subseteq U$ והתמונה שלה $\chi(T)$. אז השטח של חתיכת המשטח $\chi(T)$ הוא

$$\iint_T \sqrt{|\det G|}\,dudv$$

אני לא רוצה להיכנס לפרטים, זה בזבז זמן בשיעור. בכל מקרה זה גודל פנימי.

<u>גדלים נגזרים מתבנית יסודית ראשונה:</u> מסמנים:

$$g_{ij:1} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u}\ , g_{ij:2} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial v}$$

מסמנים גם $G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{pmatrix}$ לפי סימון טנזורי רגיל.

וכן $G_{:1} = \begin{pmatrix} g_{11:1} & g_{12:1} \\ g_{12:1} & g_{22:1} \end{pmatrix}$ ו- $G_{:2} = \begin{pmatrix} g_{11:2} & g_{12:2} \\ g_{12:2} & g_{22:2} \end{pmatrix}$.

<u>נורמל:</u>

לפי ההגדרה

$$N = \frac{\chi_1' \times \chi_2'}{\|\chi_1' \times \chi_2'\|}$$

זה וקטור באורך 1 שמאונך ל- χ_1' ול- χ_2' (ולכן לכל וקטור משיק למשטח). זהו גודל חיצוני. $\{\chi_1'(u,v)\ , \chi_2'(u,v), N(u,v)\}$ הוא בסיס לכל המרחב.

<u>מקור של תבנית יסודית שנייה וסימני כריסטופל:</u>

לפי ההגדרה אילו רק המקדמים בהצגה של הווקטור χ_{ij}'' לפי הבסיס $\{\chi_1'\ , \chi_2', N\}$

$\chi''_{ij} = \Gamma_{ij}^1\chi'_1 + \Gamma_{ij}^2\chi'_2 + L_{ij}N$ (יש שלוש משוואות כאלה, ל- $ij = 11,12,22$, ושלוש מקדמים במשוואה. ביחד 9 מקדמים).

תבנית יסודית שנייה:

לפי ההגדרה $\langle\chi'_1, N\rangle = \langle\chi'_2, N\rangle = 0, \langle N, N\rangle = 1$ ולכן

$$\langle\chi''_{ij}, N\rangle = \Gamma_{ij}^1\langle\chi'_1, N\rangle + \Gamma_{ij}^2\langle\chi'_2, N\rangle + L_{ij}\langle N, N\rangle = L_{ij}$$

וזו הנוסחא שמשתמשים בה למצוא את L_{ij} בדרך כלל.

רושמים גם $L = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{12} & L_{22} \end{pmatrix}$. זהו גודל חיצוני

וסימני כריסטופל:

לפי ההגדרה נדמה שזה גודל חיצוני, אבל הוא פנימי.

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2}\Big(\big(g_{i1:j} + g_{j1:i} - g_{ij:1}\big)g^{1m} + \big(g_{i2:j} + g_{j2:i} - g_{ij:2}\big)g^{2m}\Big)$$

נשים לב בפרט ש:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(g_{11:1} \cdot g^{11} + (2g_{12:1} - g_{11:2})g^{12})$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}(g_{11:1} \cdot g^{12} + (2g_{12:1} - g_{11:2})g^{22})$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}(g_{11:2} \cdot g^{11} + g_{22:1} \cdot g^{12})$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}(g_{11:2} \cdot g^{12} + g_{22:1} \cdot g^{22})$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}((2g_{12:2} - g_{22:1})g^{11} + g_{22:2} \cdot g^{12})$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}((2g_{12:2} - g_{22:1})g^{12} + g_{22:2} \cdot g^{22})$$

בפרט, אם המטריצה G אלכסונית ($g_{12} = 0$, מה שגורר $g_{12:1} = g_{12:2} = g^{12} = 0$ ומנוסחאת מטריצה הפוכה $g^{11} = \frac{1}{g_{11}}$ ו- $g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$)

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(g_{11:1} \cdot g^{11}) = \frac{g_{11:1}}{2g_{11}}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2}g_{11:2} \cdot g^{22} = -\frac{g_{11:2}}{2g_{22}}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}g_{11:2} \cdot g^{11} = \frac{g_{11:2}}{2g_{11}}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g_{22:1} \cdot g^{22} = \frac{g_{22:1}}{2g_{22}}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} g_{22:1} \cdot g^{11} = -\frac{g_{22:1}}{2g_{11}}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g_{22:2} \cdot g^{22} = \frac{g_{22:2}}{2g_{22}}$$

<u>עקמומיות גאוסיאנית ונורמלית:</u>

תהי מסילה $\beta = \chi \circ \alpha$ על המשטח. במהירות יחידה. אזי:

א. β' וקטור משיק למשטח. ולכן הוא מאונך ל- N (הנורמל למשטח).
ב. β' ו- N מאונכים למכפלה הווקטורית $N \times \beta'$, לפי הגדרה.
ג. $\|\beta'\| = 1$ ממהירות יחידה $\|N\| = 1$ לפי הגדרה. $\|N \times \beta'\|$ שווה לשטח המקבילית ש- β' ו- N יוצרים, וזה ריבוע עם אורך צלע 1, ולכן $\|N \times \beta'\| = 1$
ד. יוצא ש- $\{\beta', N, N \times \beta'\}$ בסיס אורתנורמלי.
ה. β'' מאונך ל- β' ולכן הוא צירוף ליניארי של שני האיברים האחרים בבסיס. נסמן את המקדמים $\beta'' = k_g N \times \beta' + k_N N$.
ו. k_g נקרא העקמומיות הגאוסיאנית של β ו- k_N העקמומיות הנורמלית.
ז. יוצא ש- $\sqrt{k_g^2 + k_N^2} = \|\beta''\| = k$ (תכונה של בסיס אורתונורמלי)
ח. למדתם נוסחאות לעקמומיות הללו. נסמן $\alpha(t) = \left(\alpha^1(t), \alpha^2(t)\right)$ ואז:

$$k_g N \times \beta' = \left(\alpha^{1''}(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^1 \alpha^{i'}(t) \alpha^{j'}(t)\right) \chi_1' + \left(\alpha^{2''}(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^2 \alpha^{i'}(t) \alpha^{j'}(t)\right) \chi_2'$$

ולכן

$$|k_g| = \sqrt{\left(\alpha^{1''}(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^1 \alpha^{i'}(t) \alpha^{j'}(t)\right)^2 + \left(\alpha^{2''}(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^2 \alpha^{i'}(t) \alpha^{j'}(t)\right)^2}$$

זהו גודל פנימי

ואילו

$$k_N N = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij} \alpha^{i'}(t) \alpha^{j'}(t) N$$

ולכן

$$k_N = \sum_{i,j=1}^{2} L_{ij} \alpha^{i'}(t) \alpha^{j'}(t)$$

לא רק שזה גודל חיצוני, זה גם לא תלוי בעקמומיות של העקומה כי הנגזרת השנייה לא מופיעה בנוסחא. זה תלוי רק בגיאומטריה החיצונית של המישור – בתבנית היסודית השנייה.

ט. לעקמומיות הגאוסיאנית יש סימן, כמו לעקמומיות של מסליה במישור. הסימן שלה יהיה הסימן של הדטרמיננמה $\det\begin{pmatrix} {\alpha^1}'(t) & {\alpha^1}''(t)+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{1}{\alpha^i}'(t){\alpha^j}'(t) \\ {\alpha^2}'(t) & {\alpha^2}''(t)+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{ij}^{2}{\alpha^i}'(t){\alpha^j}'(t)\end{pmatrix}$
הדטרמיננטה הזאת היא לא k_g, זו רק דרך למצוא את הסימן של k_g
(k_g גדול מ-0 אם ורק אם הדארמיננטה גדולה מ-0)

<u>תבנית צורה:</u>

בגלל של $\|N(u,v)\|=1$, ז"א $\langle N,N\rangle=1$, $2\langle N,N_u'\rangle=\langle N,N\rangle_u'=1'=0$ ולכן $N_1'=N_u'$ מאונך ל- N. $N_2'=N_v'$ מאונך ל- N מאותה סיבה. נובע ש- N_1',N_2' הם צירופים ליניאריים של χ_1' ו- χ_2'. נסמן $N_1'=L_1^1\chi_1'+L_1^2\chi_2'$ ו- $N_2'=L_2^1\chi_1'+L_2^2\chi_2'$.

המטריצה $S=\begin{pmatrix} L_1^1 & L_1^2 \\ L_2^1 & L_2^2\end{pmatrix}$