הרצאה 9

מרחב השורות והעמודות של מטריצה

תהיי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

מרחב העמודות של A הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ הנפרש ע"י העמודות של המטריצה A ז"א $\left\{Av : v\in\mathbb{F}^n\right\}$.

מרחב השורות של A הוא תת מרחב של $\mathbb{F}^m$ הנפרש ע"י השורות של המטריצה A ז"א $\left\{A^t v : v\in\mathbb{F}^m\right\}$.

<u>הערה</u>

מרחב השורות של מטריצה A שווה למרחב העמודות של המטריצה A^t.

<u>דוגמא</u>

$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

נזכיר ש $\sum_{i=1}^{n} x_i C_i\left(A\right)=A\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}$.

מרחב העמודות של A:

$$\left\{Av : v\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix} : x,y,z\in\mathbb{R}\right\}=span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}\right\}\right)$$

מרחב השורות של A:

$$\left\{A^t v : v\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right\}=\left\{x\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix} : x,y\in\mathbb{R}\right\}=span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}\right\}\right)\cdot$$

<u>דרגת העמודות</u>

דרגת העמודות של $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ היא מימד מרחב העמודות.

<u>דוגמא</u>

בדוגמא הקודמת קיבלנו את מרחב העמודות:

$$\left\{Av : v\in\mathbb{R}^3\right\}=span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}\right\}\right)\cdot$$

נבדוק מהו המימד של מרחב העמודות ונקבל את דרגת העמודות של המטריצה:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}\overset{R_1+R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix}\overset{2R_2-R_3\to R_3}{\approx}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

קיבלנו בסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}\right\}$ ולכן דרגת העמודות היא 2.

<u>דרגת השורות</u>

דרגת השורות של $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ היא מימד מרחב השורות.

בדוגמא הקודמת קיבלנו את מרחב השורות:

$$\left\{A^t v : v \in \mathbb{R}^3\right\} = span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}\right)$$

נבדוק מהו המימד של מרחב השורות ונקבל את דרגת השורות של המטריצה:

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} \overset{R_1-2R_2\to R_2}{\approx} \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\0 & 3 & 6\end{pmatrix}$$

קיבלנו בסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$ ולכן דרגת השורות היא 2.

<u>הערה</u>

שימו לב: קיבלנו שדרגת העמודות שווה לדרגת העמודות שווה לשתיים.

בהמשך נראה שדרגת העמודות שווה לדרגת העמודות ונקרא לערך זה דרגת המטריצה ונסמנו $rank\left(A\right)$.

<u>טענה</u>

תהיי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

התכונות הבאות שקולות:

א. למערכת $Ax=b$ יש פתרון.

ב. b שייך למרחב העמודות של A.

ג. למטריצות A ו $\left(A|b\right)$ יש אותה דרגת עמודות.

<u>הוכחה</u>

א⇐ב

נתון של מערכת $Ax=b$ יש פתרון ולכן קיים $\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\.\\.\\.\\v_n\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ שעבורו $A\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\.\\.\\.\\v_n\end{pmatrix}=b$.

נזכיר ש $\sum_{i=1}^{n} x_i C_i\left(A\right) = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$ ולכן $A\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\.\\.\\.\\v_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i C_i\left(A\right) = b$ ז"א b שייך למרחב העמודות של A.

ב⇐ג

נניח שדרגת העמודות של מטריצה A היא k. יהי $B=\left\{v_1,v_2,...,v_k\right\}$ בסיס של מרחב העמודות של המטריצה A ז"א $C_i\left(A\right) \in span\left\{v_1,v_2,...,v_k\right\}$ לכל $1 \le i \le m$. נתון ש b שייך למרחב העמודות של A, ולכן $b=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i v_i$ ז"א $b \in span\left\{v_1,v_2,...,v_k\right\}$ ובנוסף $C_i\left(A\right) \in span\left\{v_1,v_2,...,v_k\right\}$ לכל

$1 \le i \le m$ ולכן $span\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ שווה למרחב העמודות של המטריצה $(A|b)$. $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$

בסיס של מרחב העמודות של המטריצה A הקבוצה $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ בת"ל.

$B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ פורשת ובת"ל ולכן בסיס והמימד של המטריצה $(A|b)$ הוא k.

ג$\Leftarrow$א

נניח שלמטריצה A ולמטריצה $(A|b)$ יש אותה דרגת עמודות k.

יהי $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ בסיס של מרחב העמודות של המטריצה A.

מרחב העמודות של A מוכל במרחב העמודות של $(A|b)$ מכיוון שאם v שייך למרחב העמודות של A אז

$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i(A) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i(A) + 0 \cdot b$ ז"א v שייך למרחב העמודות של $(A|b)$.

$B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ מוכל במרחב העמודות של A ולכן מוכל במרחב העמודות של $(A|b)$.

$B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ קבוצה בת"ל כבסיס של מרחב העמודות של A.

המימד של מרחב העמודות של $(A|b)$ שווה ל k שווה למספר האיברים ב $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$.

סה"כ קיבלנו ש $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ בסיס של מרחב העמודות של $(A|b)$.

$$b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j C_j(A) \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right) \beta_j C_j(A)$$

נזכיר ש $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i C_i(A)$ ואז $A\begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)\beta_1 \\ \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)\beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right)\beta_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right) \beta_j C_j(A) = b$.

<u>משפט הדרגה</u>

דרגת השורות של מטריצה שווה לדרגת שווה לדרגת העמודות שלה.

<u>הוכחה</u>

תהיי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

נניח שדרגת העמודה היא k. נניח ש $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ בסיס של מרחב העמודות של A.

נסמן $B = (b_1, b_2, ..., b_k) \in \mathbb{F}^{m \times k}$.

מכיוון ש $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ בסיס של מרחב העמודות של A ניתן לרשום כל עמודה ב A כקומבינציה

ליניארית של $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ $C_i(A) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} b_j$.

עבור מטריצה $C \in \mathbb{F}^{k\times n}$ המקיימת $c_{ij} = \alpha_{ji}$ נקבל ש

$$BC = \left(BC_1(C), BC_2(C), ..., BC_n(C)\right) = \left(C_1(BC), C_2(BC), ..., C_n(BC)\right)$$

$$BC_i(C) = B\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ . \\ . \\ . \\ c_{ki} \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ . \\ . \\ . \\ \alpha_{ik} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} C_j(B) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} b_j = C_i(A).$$

סה"כ קיבלנו ש $A = BC$.

$$A = BC = \begin{pmatrix} R_1(B)C \\ R_2(B)C \\ . \\ . \\ . \\ R_m(B)C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(A) \\ R_2(A) \\ . \\ . \\ . \\ R_m(A) \end{pmatrix} \Rightarrow R_i(A) = R_i(B)C = \sum_{j=1}^{k} b_{ij} R_j(C).$$

כל שורה ב A היא קומבינציה ליניארית של הקבוצה $\left\{R_i(C)\right\}_{i=1}^{k}$ ולכן המימד של מרחב השורות קטן או שווה ל k.

הוכחנו שלכל מטריצה A דרגת השורות קטנה או שווה לדרגת העמודות.

דרגת העמודות של המטריצה A שווה לדרגת השורות של המטריצה A^t שקטנה או שווה לדרגת העמודות של המטריצה A^t ששווה לדרגת השורות של המטריצה A ואז דרגת העמודות של מטריצה A קטנה או שווה לדרגת השורות.

מסקנה: דרגת העמודות שווה לדרגת השורות.

<u>הערה</u>

כיוון שלכל מטריצה A, דרגת השורות של A שווה לדרגת העמודות של A, נקרא לערך זה דרגת המטריצה. סימון: $rank(A)$.

<u>מסקנה</u>

$$rank(A) = rank\left(A^t\right)$$

<u>תרגיל</u>

נתונה המטריצה הממשית הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

א. מצא בסיס למרחב השורות של A. מהו מימדו?

ב. מהו מימד מרחב העמודות של A? מצא בסיס למרחב זה.

<u>פתרון</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{9R_1 - R_2 \to R_2 \\ 7R_1 - R_3 \to R_3}}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 \end{pmatrix}$$ הבסיס למרחב השורות הוא

$\left\{(1,2,3,4,5), (0,1,2,3,4)\right\}$ ולכן המימד הוא 2.

ב. המימד של מרחב העמודות שווה למימד של מרחב השורות שווה ל 2.

הבסיס של מרחב העמודות של מטריצה A שווה לבסיס של מרחב השורות של המטריצה A^t.

$$\begin{pmatrix}1&9&7\\2&8&4\\3&7&1\\4&6&-2\\5&5&-5\end{pmatrix}\underset{\substack{2R_1-R_2\to R_2\\3R_1-R_3\to R_3\\4R_1-R_4\to R_4\\5R_1-R_5\to R_5}}{\approx}\begin{pmatrix}1&9&7\\0&10&10\\0&20&20\\0&30&30\\0&40&40\end{pmatrix}$$

הבסיס של מרחב העמודות $\{(1,9,7),(0,1,1)\}$.

משפט

יהיו A,B מטריצות כך שהכפל AB מוגדר.

$rank(AB)\le rankA, rankB$.

הוכחה

$$AB=\left(AC_1(B),AC_2(B),...,AC_k(B)\right)=\left(C_1(AB),C_2(AB),...,C_k(AB)\right)$$

$$C_j(AB)=AC_j(B)=\sum_{i=1}^{n}b_{ij}C_j(B).$$

נניח שהדרגה של B היא r ז"א קיים בסיס $\{b_1,b_2,...,b_r\}$ של מרחב העמודות של B וכל עמודה ניתן

לרשום כקומבינציה ליניארית של הקבוצה $\{b_1,b_2,...,b_r\}$. $C_j(B)=\sum_{t=1}^{r}\alpha_{tj}b_t$.

$C_j(AB)=\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\left(\sum_{t=1}^{r}\alpha_{tj}b_t\right)=\sum_{t=1}^{r}\alpha_{tj}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ij}\right)b_t$ קיבלנו שכל עמודה במטריצה AB ניתן לרשום

כקומבינציה ליניארית של הקבוצה $\{b_1,b_2,...,b_r\}$ ולכן $rank(AB)\le rankB$.

מהאי שוויון $rank(AB)\le rankB$ ומכך ש $rankA=rankA^t$ נקבל

$$rank(AB)=rank\left((AB)^t\right)=rank\left(B^tA^t\right)\le rankA^t=rankA$$

תרגיל

תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: A הפיכה $\Leftrightarrow$ $rank(A)=n$.

פתרון

$\Leftarrow$

נניח ש A הפיכה ז"א קיימת מטריצה B כך ש $AB=I$.

מכיוון ש $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקבל ש $rank(A)\le n$.

מכיוון ש $AB=I$ נקבל ש $rankA\ge rank(AB)=rank(I)=n$.

סה"כ קיבלנו ש $rank(A)=n$.

$\Rightarrow$

נניח ש $rank\left(A\right)=n$ ולכן מרחב העמודות של המטריצה שווה ל $\mathbb{F}^n$ ז"א לכל $b\in\mathbb{F}^n$ למערכת המשוואות $Ax=b$ יש פתרון וזאת מכיוון ש $\sum_{i=1}^{n} x_iC_i\left(A\right)=A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$.

קיימים וקטורים v_i כך ש $Av_i=e_i$. נסמן $B=\left(v_1,v_2,...,v_n\right)$ ונקבל ש

$AB=\left(AC_1\left(B\right),AC_2\left(B\right),...,AC_n\left(B\right)\right)=\left(Av_1,Av_2,...,Av_n\right)=\left(e_1,e_2,...,e_n\right)=I$.

<u>משפט</u>

מימד מרחב הפתרונות W של מערכת הומוגנית של משוואות ליניאריות $AX=0$ הוא $n-r$ כאשר n הוא מספר הנעלמים ו r הוא הדרגה של המטריצה.

<u>הוכחה</u>

נתון ש $rankA=r$ ולכן ניתן להניח ש $\left\{u_1,u_2,...,u_r\right\}$ בסיס של מרחב העמודות של המטריצה A.

$span\left\{C_j\left(A\right)\right\}_{j=1}^{n}=span\left\{u_i\right\}_{i=1}^{r}$ ולכן $u_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}C_j\left(A\right)$.

$u_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}C_j\left(A\right)=A\begin{pmatrix}\alpha_{i1}\\\alpha_{i2}\\.\\.\\.\\\alpha_{ir}\end{pmatrix}$. סה"כ קיבלנו שלכל $1\le i\le r$ למערכת $Ax=u_i$ יש פתרון v_i.

לכל $1\le i\le r$ $Av_i=u_i$.

נניח ש $\dim W=s$ והקבוצה $\left\{w_1,w_2,...,w_s\right\}$ היא בסיס של W.

נוכיח שהקבוצה $B=\left\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_s\right\}$ היא בסיס של $\mathbb{F}^n$.

נוכיח ש $B=\left\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_s\right\}$ פורשת.

נניח ש $v\in\mathbb{F}^n$ ו $Av=u$. u שייך למרחב העמודות של A ולכן Av היא קומבינציה ליניארית של הקבוצה $\left\{u_1,u_2,...,u_r\right\}$ ז"א $Av=\sum_{i=1}^{r}\alpha_iu_i$. נסמן $v'=v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_iu_i$.

$$Av'=A\left(v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_iv_i\right)=Av-A\sum_{i=1}^{r}\alpha_iv_i=Av-\sum_{i=1}^{r}\alpha_iAv_i=Av-\sum_{i=1}^{r}\alpha_iu_i=Av-Av=0$$

לכן $v'\in W$ ז"א v' הוא קומבינציה ליניארית של הקבוצה $\left\{w_1,w_2,...,w_s\right\}$ ז"א $v'=\sum_{i=1}^{s}\beta_iw_i$.

מכיוון ש $v'=v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_iu_i$ נקבל ש $v-\sum_{i=1}^{r}\alpha_iu_i=\sum_{i=1}^{s}\beta_iw_i \Leftarrow v=\sum_{i=1}^{s}\beta_iw_i+\sum_{i=1}^{r}\alpha_iu_i$ ז"א הקבוצה $B=\left\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_s\right\}$ פורשת.

נוכיח ש $B=\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_s\}$ בת"ל

נניח ש $\sum_{i=1}^{s}\beta_i w_i + \sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i = 0$ צ"ל ש $\alpha_i = 0$ לכל $1\le i\le r$ ו $\beta_i = 0$ לכל $1\le i\le s$.

$$0 = A\cdot 0 = A\cdot\left(\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{s}\beta_i w_i\right) = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i A v_i + \sum_{i=1}^{s}\beta_i A w_i .$$

הקבוצה $\{w_1,w_2,...,w_s\}$ היא בסיס של מרחב הפתרונות ולכן לכל $1\le i\le s$ נקבל ש $Aw_i = 0$.

$$0 = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i A v_i + \sum_{i=1}^{s}\beta_i A w_i = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i A v_i = \sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i .$$

הקבוצה $\{u_1,u_2,...,u_r\}$ בסיס למרחב העמודות ולכן בת"ל.

מכיון ש $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i u_i = 0$ נקבל ש $\alpha_i = 0$ לכל $1\le i\le r$ ז"א $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i = 0$ ביחד עם ההנחה ש $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{s}\beta_i w_i = 0$ נקבל ש $\sum_{i=1}^{s}\beta_i w_i = 0$ מכיוון שהקבוצה $\{w_1,w_2,...,w_s\}$ היא בסיס של מרחב הפתרונות נקבל שהקבוצה $\{w_1,w_2,...,w_s\}$ בת"ל ז"א $\beta_i = 0$ לכל $1\le i\le s$.

הקבוצה $B=\{v_1,v_2,...,v_r,w_1,w_2,...,w_s\}$ בסיס של $\mathbb{F}^n$ ולכן $r+s=n \Leftarrow s=n-r$.

<u>דוגמא</u>

ראינו שדרגת המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\9&8&7&6&5\\7&4&1&-2&-5\end{pmatrix}$ היא 2 ולכן מימד מרחב הפתרונות של המשוואה $Ax=0$ הוא 3.